

## 長田パッチの3次への拡張

### Extension of Nagata Patch to Cubic Degree

清水 保弘

**要約** 長田パッチは、理化学研究所のVCADプロジェクトの中で長田隆氏により創案された技術である。それは、三角形あるいは四角形から構成された多面体モデルの各面を頂点と頂点法線から滑らかに補間する2次多項式曲面式であり、局所補間性と簡便性というすぐれた特性を持っている。日本ユニシスと日本ユニシス・エクセリューションズでは、多面体モデルを用いたCAD曲面変形機能の開発に長田パッチ適用を試みた。その結果、期待効果が得られる反面、隣接頂点での法線が平行に近いとき形状が乱れる場合のあることがわかった。この課題をパッチ定義式の3次多項式への拡張と、それに伴って生ずる自由度を独自に導出した三角クーンズ曲面式を用いて決定することにより解決した。

**Abstract** Nagata patch is the technology invented by Dr. Takashi Nagata in VCAD project of RIKEN. Nagata patch smoothly interpolates by quadratic polynomials each triangular or rectangular face of polyhedral models from vertices and vertex normal vectors. It has excellent properties of local interpolation and availability. In Nihon Unisys and UEL Corporation we tried to apply Nagata patch during development of CAD (Computer Aided Design) surface deformation by polyhedral models. As a result, we obtained expected results in many cases, but we found not functioning cases when adjacent vertices have almost parallel normal vectors. We have solved the problem by an extension of Nagata patch to cubic degree and by the use of triangular Coons surfaces specially designed to determine the extra degree of freedom.

### 1. はじめに

有限要素法 (FEM) による数値シミュレーションでは、通常、対象領域を離散的な格子点群で近似して計算を行う。これに伴い、領域内に含まれる対象物表面形状は三角形や四角形から構成される多面体モデル (三角形メッシュ, 四角形メッシュ) で表される。一方, CAD (Computer Aided Design: コンピュータ支援設計) 分野では伝統的に滑らかな曲面モデルが使われてきたが、近年、計測情報処理の発達により、多面体モデルと曲面モデルを混在させた形状処理が行われるようになってきた。このような混在モデルでは、多面体表面を構成する各三角形や四角形の辺および内部を簡便な曲面式により滑らかに補間したい場面が生ずる。例えば、曲面を三角形メッシュに多面体近似し、その三角形メッシュを数値シミュレーションで変形後、変形されたメッシュに合わせて曲面を滑らかに変形するという処理を考えると、多面体頂点位置で算出される変形量を頂点間の中間位置にも滑らかに補間する計算が必要になる。

“長田パッチ”は、理化学研究所のVCADプロジェクトの中で長田隆氏により創案された曲面式で、三角形メッシュ、四角形メッシュの各頂点に付与された法線ベクトル (形状表面に直交する方向) から、曲面の丸みを簡便に補間するのに有効な技術である<sup>[1][2][3][4]</sup>。

日本ユニシス株式会社と日本ユニシス・エクセリューションズ株式会社では、CAD 開発の過程で、三角形メッシュの変形に合わせて曲面を変形する形状処理に、長田パッチの適用を試みた<sup>[6]</sup>。その結果、多くのテストケースで長田パッチは期待通りの好結果をもたらしたが、三角形メッシュの隣接頂点での法線ベクトルが平行に近いとき、形状が乱れる場合のあることが判明した。文献<sup>[1][2]</sup>でも、このような場合に言及しており、メッシュ分割を十分細かくして対処するよう推奨されている。しかし、与えられた粗いメッシュ分割のままでは処理を進めなければならない場合には別の対処が必要である。本稿では、このような場合を想定した「2次多項式で表されるオリジナルの長田パッチ曲面式を3次多項式に拡張する」という対策について報告する。

本稿の構成は以下の通りである。続く2章と3章は数学的準備であり、2章でオリジナルの長田パッチ曲面式を説明し、3章で長田パッチ曲面式を一般的なベジエ曲面式で表現する。4章からが本稿の主要結果である。4章で、直面した課題「平行に近い頂点法線を補間する際の形状の乱れ」について述べる。5章では、課題解決に向けて長田パッチを3次に拡張する対策を採用し、そこで解くべき問題を明らかにする。その解法を述べたのが6章である。ここでは三角クーンズ曲面として知られる曲面式の一つを工夫し、長田パッチの3次への拡張が完結する。7章では、これらの対策により形状の乱れが改善することを報告する。8章は、本稿の内容のまとめである。

## 2. オリジナルの長田パッチ

文献<sup>[1][2]</sup>では、三角形の頂点と、その各頂点に与えられた単位法線ベクトルから、2次多項式により三角形領域内に丸みを持って補間する曲面式を定義している。本稿では、この曲面式(定義は2.2節参照)を通称に従い、“長田パッチ”と呼ぶことにする。

なお、長田パッチには、いくつかの変種がある。まず、文献<sup>[1]</sup>では四角形領域を同様に補間する曲面式も定義されているが、本稿では三角形領域の補間に限定するため割愛する。また、文献<sup>[1][2]</sup>で定義される曲面式は、隣接パッチ間での連続性は頂点間で近似的な接平面連続性しか満たしていないが、別の文献<sup>[3][4]</sup>では、定義式を有理式まで拡張することで厳密な接平面連続性を満たす曲面式も定義されている。この曲面式は“ $G^1$ 長田パッチ”と呼ばれるが、本稿では多項式による補間に限定するため割愛する。

長田パッチで基本となるのは、多角形の各辺(線分)を、2端点と各点での単位法線ベクトルから2次多項式で曲線補間する曲線式であり、本稿では“長田セグメント”と呼ぶ。

### 2.1 長田セグメント

図1に示すように、始点を $\mathbf{P}_0$ 、終点を $\mathbf{P}_1$ 、各々の位置ベクトルを $\mathbf{x}_0$ 、 $\mathbf{x}_1$ 、単位法線ベクトルを $\mathbf{n}_0$ 、 $\mathbf{n}_1$ とする(本節の(2.1.1)から(2.1.6)までは文献<sup>[1]</sup>2.1.1に準拠している)。

$0 \leq \xi \leq 1$  をパラメタとして、次の形の2次多項式曲線

$$\mathbf{x}(\xi) = \mathbf{x}_0 + (\mathbf{d} - \mathbf{c})\xi + \mathbf{c}\xi^2 \quad (2.1.1)$$

で、 $\mathbf{x}_0$ 、 $\mathbf{x}_1$ 、 $\mathbf{n}_0$ 、 $\mathbf{n}_1$ を補間する。ここに、 $\mathbf{x}$ は曲線の線上点を表す位置ベクトル、 $\mathbf{d}$ は始点から終点に向かう差ベクトル

$$\mathbf{d} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 \quad (2.1.2)$$

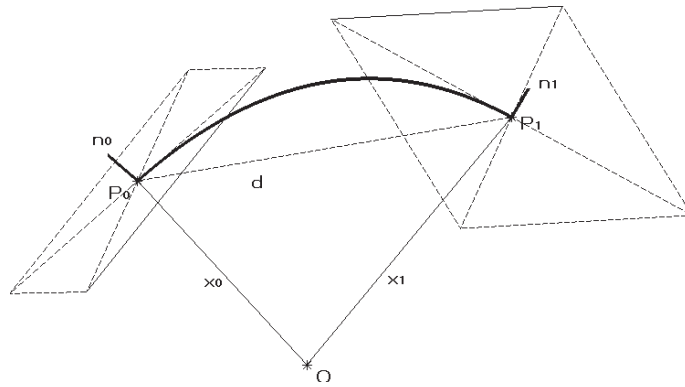


図1 長田セグメントの補間対象 (文献<sup>[1]</sup> Fig1 を参考に再描画)

$\mathbf{c}$  は  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1$  から算出される未知定数ベクトルであり, 文献<sup>[2][3]</sup>で“曲率パラメタ”と呼ばれ, 曲線の膨らみを規定する.

まず,  $\mathbf{c}$  の値に関わらず, 曲線式(2.1.1)は始終点通過拘束条件を満たしていることに注意する:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}(1) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{d} = \mathbf{x}_1 \tag{2.1.3}$$

次に, 曲線式(2.1.1)の任意位置における接ベクトルを計算すると,

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\xi} = \mathbf{d} + (2\xi - 1)\mathbf{c} \tag{2.1.4}$$

であり,  $\xi = 0, 1$  で  $\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1$  各々と直交することから,  $\langle, \rangle$  をベクトル内積として,

$$\langle \mathbf{n}_0, \mathbf{d} - \mathbf{c} \rangle = 0 \tag{2.1.5}$$

$$\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{d} + \mathbf{c} \rangle = 0 \tag{2.1.6}$$

を得る.

さて, 文献<sup>[1]</sup>では, 法線直交条件(2.1.5), (2.1.6)が未知ベクトル  $\mathbf{c}$  を規定する方程式であると考え, これから  $\mathbf{c}$  を決定しようとする. しかし,  $\mathbf{c}$  の未知成分3個に対して, 方程式が2本であるため, 一般逆行列を用いて解いている.

本稿では, 文献<sup>[1]</sup>の議論の詳細に立ち入らないが, ベクトル  $\mathbf{c}$  が, ある係数  $\lambda_0, \lambda_1$  により単位法線ベクトルの1次結合で表されること

$$\mathbf{c} = \lambda_0 \mathbf{n}_0 + \lambda_1 \mathbf{n}_1 \tag{2.1.7}$$

を長田セグメントの特徴として要請するだけで, ベクトル  $\mathbf{c}$  を幾何的に算出する. 本稿の議論は, 長田氏の原論文<sup>[1][2][3][4]</sup>で明記されていない“曲率パラメタ”  $\mathbf{c}$  の幾何的意味を明確にするものと考えている.

まず,  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1$  を結ぶ弦の中点を  $\mathbf{x}_m$

$$\mathbf{x}_m = \mathbf{x}_0 + \frac{\mathbf{d}}{2} \quad (2.1.8)$$

とし、 $\mathbf{x}_m$  からベクトル  $(-\mathbf{c}/2)$  だけ移動した位置を  $\mathbf{p}_m$  とする：

$$\mathbf{p}_m = \mathbf{x}_m - \frac{\mathbf{c}}{2} \quad (2.1.9)$$

また、点  $\mathbf{x}_j (j=0, 1)$  を通り法線ベクトル  $\mathbf{n}_j$  に直交する平面を  $\{\mathbf{x}_j, \mathbf{n}_j\}$  で表す。これは曲線が接するべき平面なので、以下、「接平面」とよぶ。

すると、 $\mathbf{p}_m$  と始終点との差ベクトルは、次のようになる：

$$\mathbf{p}_m - \mathbf{x}_0 = \left( \left( \mathbf{x}_0 + \frac{\mathbf{d}}{2} \right) - \frac{\mathbf{c}}{2} \right) - \mathbf{x}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{d} - \mathbf{c}) \quad (2.1.10)$$

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{p}_m = \mathbf{x}_1 - \left( \left( \mathbf{x}_0 + \frac{\mathbf{d}}{2} \right) - \frac{\mathbf{c}}{2} \right) = \frac{1}{2}(\mathbf{d} + \mathbf{c}) \quad (2.1.11)$$

(2.1.10), (2.1.11) を法線直交条件(2.1.5), (2.1.6)に代入すると、

$$\langle \mathbf{n}_0, \mathbf{p}_m - \mathbf{x}_0 \rangle = 0 \quad (2.1.12)$$

$$\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{x}_1 - \mathbf{p}_m \rangle = 0 \quad (2.1.13)$$

を得、これから

点  $\mathbf{p}_m$  は、始点側接平面  $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{n}_0\}$  上にも、また、終点側接平面  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{n}_1\}$  上にもなければならぬ。すなわち、両接平面が交線を持つ場合には、交線上になければならぬ

(条件 A)

ことが導かれる。さて長田セグメントでは、 $\mathbf{c}$  に(2.1.7)を要請するので、ベクトル外積を  $\times$  で表すと

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{n}_0 \times \mathbf{n}_1 \rangle = 0 \quad (2.1.14)$$

が成り立つ。両接平面  $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{n}_0\}$ ,  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{n}_1\}$  が交線を持つ場合には、 $\mathbf{n}_0 \times \mathbf{n}_1$  は交線の方向ベクトルと平行なので、(2.1.14)から

ベクトル  $\mathbf{c}$  は、両接平面が交線を持つ場合には、交線と直交しなければならない

(条件 B)

ことがわかる。こうして、(条件 A), (条件 B), (2.1.9)から、

両接平面が交線を持つ場合、点  $\mathbf{p}_m$  は弦  $\mathbf{x}_m$  の中点から交線に下した垂線の足である

(条件 C)

が結論される。(条件 C)は、 $\mathbf{p}_m$  を決める条件であると同時に、(2.1.9)を通じてベクトル  $\mathbf{c}$  も

決めることに注意する。図2に、文献<sup>[1]</sup>で採用されているベクトル  $\mathbf{c}$  と、それを可視化した点  $\mathbf{p}_m$  の位置関係を示す。

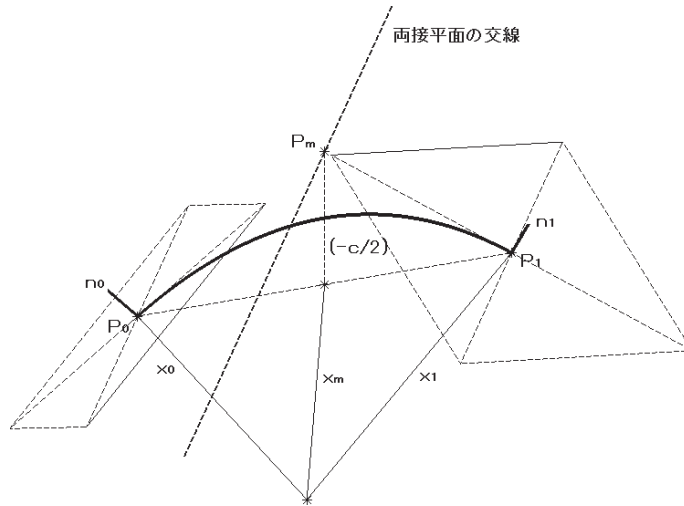


図2 長田論文<sup>[1]</sup>でのベクトルの決め方

文献<sup>[1]</sup>では、両接平面が平行で、交線を持たない場合、ベクトル  $\mathbf{c}$  として零ベクトル  $\mathbf{c} = 0$  を採用するとしているが、この場合、(2.1.9)から、 $\mathbf{p}_m = \mathbf{x}_m$  であり、長田セグメントは始終点を結ぶ弦と一致し、始終点で与えられた法線ベクトルと必ずしも直交しない。このような事態は点間間隔が大き過ぎるためであり、文献<sup>[1]</sup>では、精度を満たすまで分割を細かくすることを推奨している。しかし現実には、与えられた点間間隔のまま処理を進めなければならない場合もあり、本稿では、4章、5章で対策を述べる。

## 2.2 長田パッチ

図3(a)のように三角形を構成する3頂点  $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$  の位置ベクトルを  $\mathbf{x}_{00}, \mathbf{x}_{10}, \mathbf{x}_{11}$ 、各頂点での単位法線ベクトルを  $\mathbf{n}_{00}, \mathbf{n}_{10}, \mathbf{n}_{11}$  とし、図3(b)に示す三角形領域 ( $0 \leq \zeta \leq \eta \leq 1$ ) のパラメタ  $\eta, \zeta$  で定義される三角曲面パッチ

$$\mathbf{x}(\eta, \zeta) = \mathbf{c}_{00} + \mathbf{c}_{10}\eta + \mathbf{c}_{01}\zeta + \mathbf{c}_{11}\eta\zeta + \mathbf{c}_{20}\eta^2 + \mathbf{c}_{02}\zeta^2 \tag{2.2.1}$$

を考える (本節の(2.2.1)から(2.2.10)は、文献<sup>[1]</sup>2.2.1に準拠している)。

ここで、三角曲面パッチの3本の稜線には、頂点と単位法線ベクトルを補間する長田セグメントを次のように当てはめる：

$$\mathbf{x}(\eta, 0) = \mathbf{x}_{00} + (\mathbf{d}_1 - \mathbf{c}_1)\eta + \mathbf{c}_1\eta^2 \tag{2.2.2}$$

$$\mathbf{x}(1, \zeta) = \mathbf{x}_{10} + (\mathbf{d}_2 - \mathbf{c}_2)\zeta + \mathbf{c}_2\zeta^2 \tag{2.2.3}$$

$$\mathbf{x}(\eta, \eta) = \mathbf{x}_{00} + (\mathbf{d}_3 - \mathbf{c}_3)\eta + \mathbf{c}_3\eta^2 \tag{2.2.4}$$

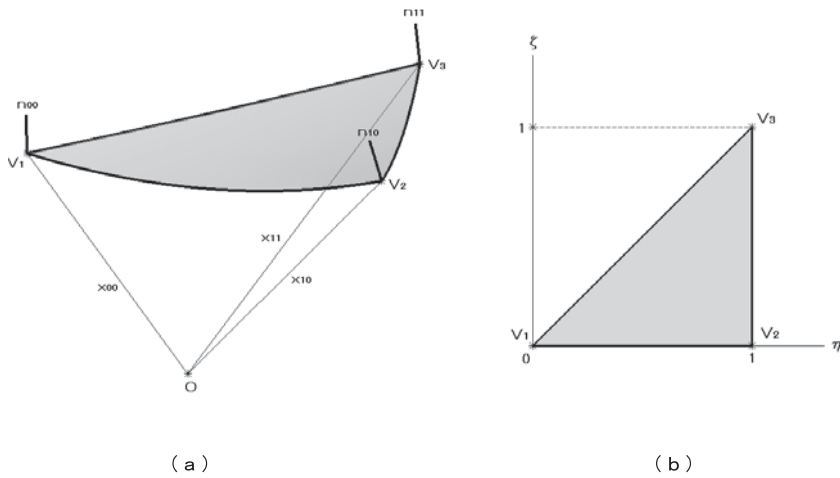


図3 長田パッチの補間対象 (文献<sup>[1]</sup>Fig3 を参考に再描画)

各長田セグメントの形状を決める係数ベクトルのうち,  $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$  は頂点の差ベクトルから決まり,  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$  は 2.1 節(条件 C)のように頂点, 単位法線ベクトルから算出される:

$$\mathbf{d}_1 = \mathbf{x}_{10} - \mathbf{x}_{00}, \mathbf{c}_1 = \text{関数}(\mathbf{x}_{00}, \mathbf{x}_{10}, \mathbf{n}_{00}, \mathbf{n}_{10}) \quad (2.2.5)$$

$$\mathbf{d}_2 = \mathbf{x}_{11} - \mathbf{x}_{10}, \mathbf{c}_2 = \text{関数}(\mathbf{x}_{10}, \mathbf{x}_{11}, \mathbf{n}_{10}, \mathbf{n}_{11}) \quad (2.2.6)$$

$$\mathbf{d}_3 = \mathbf{x}_{11} - \mathbf{x}_{00}, \mathbf{c}_3 = \text{関数}(\mathbf{x}_{00}, \mathbf{x}_{11}, \mathbf{n}_{00}, \mathbf{n}_{11}) \quad (2.2.7)$$

こうして, 三角曲面パッチの 6 個の係数ベクトル  $\mathbf{c}_{00}, \mathbf{c}_{10}, \mathbf{c}_{01}, \mathbf{c}_{11}, \mathbf{c}_{20}, \mathbf{c}_{02}$  は, 枠線の各表示

$$\mathbf{x}(\eta, 0) = \mathbf{c}_{00} + \mathbf{c}_{10}\eta + \mathbf{c}_{20}\eta^2 \quad (2.2.8)$$

$$\mathbf{x}(1, \zeta) = (\mathbf{c}_{00} + \mathbf{c}_{10} + \mathbf{c}_{20}) + (\mathbf{c}_{01} + \mathbf{c}_{11})\zeta + \mathbf{c}_{02}\zeta^2 \quad (2.2.9)$$

$$\mathbf{x}(\eta, \eta) = \mathbf{c}_{00} + (\mathbf{c}_{10} + \mathbf{c}_{01})\eta + (\mathbf{c}_{11} + \mathbf{c}_{20} + \mathbf{c}_{02})\eta^2 \quad (2.2.10)$$

を長田セグメントの各表示(2.2.2), (2.2.3), (2.2.4)と等値することで  $\mathbf{x}_{00}, \mathbf{x}_{10}, \mathbf{x}_{11}, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$  から決められる. 次の形の表示式が有用である (文献<sup>[1]</sup>(44)式):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\eta, \zeta) = & \mathbf{x}_{00}(1-\eta) + \mathbf{x}_{10}(\eta-\zeta) + \mathbf{x}_{11}\zeta \\ & - \mathbf{c}_1(1-\eta)(\eta-\zeta) - \mathbf{c}_2(\eta-\zeta)\zeta - \mathbf{c}_3(1-\eta)\zeta \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

こうして定まる三角曲面パッチ(2.2.1)あるいは(2.2.11)が“長田パッチ”である.

### 3. 三角ベジエ曲面による表現

本章では, CAD でよく使われるベジエ曲線, およびベジエ曲線より知名度は低い, 三角ベジエ曲面について説明し, 長田セグメントと長田パッチにベジエ形式での表現を与える.

### 3.1 長田セグメントのベジエ曲線表現

2変数  $u, v$  に関する2項定理

$$(u+v)^n = u^n + nu^{n-1}v + \dots + \frac{n!}{i!j!}u^i v^j + \dots + nuv^{n-1} + v^n \tag{3.1.1}$$

ここで、 $0 \leq i, j \leq n, i+j=n$

で、パラメタ  $0 \leq \xi \leq 1$  により、 $u=1-\xi, v=\xi$  としたときの展開各項  $\frac{n!}{i!j!}(1-\xi)^i \xi^j$  を基底関数とし、ベクトル係数  $\mathbf{p}_{ij}$  で1次結合して得られる曲線式

$$\mathbf{x}(\xi) = \sum_{0 \leq i, j \leq n, i+j=n} \mathbf{p}_{ij} \cdot \frac{n!}{i!j!} (1-\xi)^i \xi^j \tag{3.1.2}$$

を  $n$  次ベジエ曲線という。ここで、 $(n+1)$  個のベクトル係数  $\mathbf{p}_{ij}$  は  $n$  次ベジエ曲線の制御点とよばれる。制御点列を折れ点列と考えると、曲線の概形を表している (図4)。

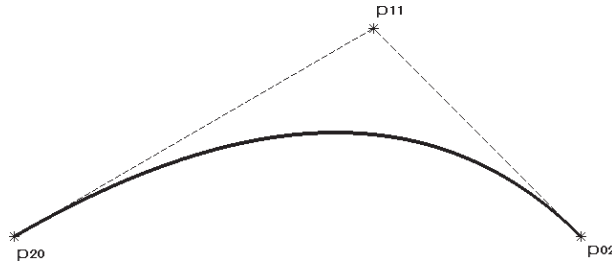


図4  $n$  次ベジエ曲線とその制御点 (図は2次の場合)

さて、2章で紹介した長田セグメント

$$\mathbf{x}(\xi) = \mathbf{x}_0 + (\mathbf{d} - \mathbf{c})\xi + \mathbf{c}\xi^2 \tag{3.1.3}$$

は2次多項式曲線であり、基底関数を変換することにより、2次ベジエ曲線

$$\mathbf{x}(\xi) = \mathbf{p}_{20}(1-\xi)^2 + \mathbf{p}_{11} \cdot 2(1-\xi)\xi + \mathbf{p}_{02}\xi^2 \tag{3.1.4}$$

として、次のように表せる：

$$\mathbf{p}_{20} = \mathbf{x}_0 \tag{3.1.5}$$

$$\mathbf{p}_{11} = \frac{\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1}{2} - \frac{\mathbf{c}}{2} \tag{3.1.6}$$

$$\mathbf{p}_{02} = \mathbf{x}_1 \tag{3.1.7}$$

$\mathbf{p}_{20}$  は始点  $\mathbf{x}_0$ 、 $\mathbf{p}_{02}$  は終点  $\mathbf{x}_1$ 、また2章の(条件C)より、 $\mathbf{p}_{11}$  は弦の midpoint から、両接平面の交線に下した垂線の足である。

### 3.2 長田パッチの三角ベジエ曲面表現

3変数  $u, v, w$  に関する多項定理

$$(u+v+w)^n = u^n + v^n + w^n + \dots + \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k + \dots \quad (3.2.1)$$

ここで,  $0 \leq i, j, k \leq n, i+j+k=n$

で, 条件  $0 \leq u, v, w \leq 1, u+v+w=1$  を課し,  $u, v, w$  を三角形の重心座標と考えたときの展開各項  $\frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k$  を基底関数とし, ベクトル係数  $\mathbf{p}_{ijk}$  で1次結合して得られる曲面式

$$\mathbf{x}(u, v, w) = \sum_{\substack{0 \leq i, j, k \leq n \\ i+j+k=n}} \mathbf{p}_{ijk} \cdot \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k \quad (3.2.2)$$

を  $n$  次三角ベジエ曲面という (Farin 論文<sup>[5]</sup>Chapter 17). ここで,  $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$  個のベクトル係数  $\mathbf{p}_{ijk}$  は, ベジエ曲線と同様に,  $n$  次三角ベジエ曲面の制御点とよばれる (図5).

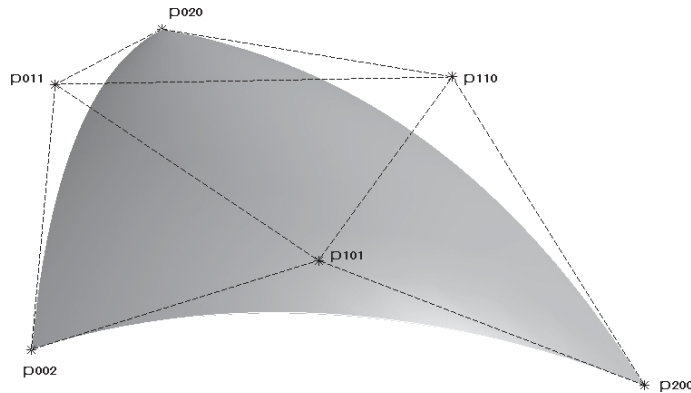


図5  $n$  次三角ベジエ曲面とその制御点 (図は2次の場合)

さて, (2.2.11)式を再掲すると, 長田パッチ

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\eta, \zeta) = & \mathbf{x}_{00}(1-\eta) + \mathbf{x}_{10}(\eta-\zeta) + \mathbf{x}_{11}\zeta \\ & - \mathbf{c}_1(1-\eta)(\eta-\zeta) - \mathbf{c}_2(\eta-\zeta)\zeta - \mathbf{c}_3(1-\eta)\zeta \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

は2次多項式曲面であり,  $u = \eta - \zeta, v = \zeta, w = 1 - \eta$  とおくと,  $u+v+w=1$  より

$$1 - \eta = w = w(u+v+w) = w^2 + uw + vw$$

$$\eta - \zeta = u = u(u+v+w) = u^2 + uv + uw$$

$$\zeta = v = v(u+v+w) = v^2 + uv + vw$$

なので, (3.2.3)は



$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(u, v, w) &= \mathbf{x}_{00} \cdot w^2 + (\mathbf{x}_{00} + \mathbf{x}_{10}) \cdot uw + \mathbf{x}_{10} \cdot u^2 \\
 &\quad + (\mathbf{x}_{00} + \mathbf{x}_{11}) \cdot vw + (\mathbf{x}_{10} + \mathbf{x}_{11}) \cdot uv + \mathbf{x}_{11} \cdot v^2 \\
 &\quad - \mathbf{c}_1 \cdot uw - \mathbf{c}_2 \cdot uv - \mathbf{c}_3 \cdot vw \\
 &= \mathbf{x}_{00} \cdot w^2 + \left( \frac{\mathbf{x}_{00} + \mathbf{x}_{10}}{2} - \frac{\mathbf{c}_1}{2} \right) \cdot 2uw + \mathbf{x}_{10} \cdot u^2 \\
 &\quad + \left( \frac{\mathbf{x}_{00} + \mathbf{x}_{11}}{2} - \frac{\mathbf{c}_3}{2} \right) \cdot 2vw + \left( \frac{\mathbf{x}_{10} + \mathbf{x}_{11}}{2} - \frac{\mathbf{c}_2}{2} \right) \cdot 2uv + \mathbf{x}_{11} v^2
 \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

となって、2次三角ベジエ曲面

$$\mathbf{x}(u, v, w) = \mathbf{p}_{002} \cdot w^2 + \mathbf{p}_{101} \cdot 2uw + \mathbf{p}_{200} \cdot u^2 + \mathbf{p}_{011} \cdot 2vw + \mathbf{p}_{110} \cdot 2uv + \mathbf{p}_{020} \cdot v^2 \tag{3.2.5}$$

として表現できる。ここで、制御点と長田パッチの係数ベクトルの関係は次の通り：

$$\mathbf{p}_{002} = \mathbf{x}_{00} \tag{3.2.6}$$

$$\mathbf{p}_{101} = \frac{\mathbf{x}_{00} + \mathbf{x}_{10}}{2} - \frac{\mathbf{c}_1}{2} \tag{3.2.7}$$

$$\mathbf{p}_{200} = \mathbf{x}_{10} \tag{3.2.8}$$

$$\mathbf{p}_{011} = \frac{\mathbf{x}_{00} + \mathbf{x}_{11}}{2} - \frac{\mathbf{c}_3}{2} \tag{3.2.9}$$

$$\mathbf{p}_{110} = \frac{\mathbf{x}_{10} + \mathbf{x}_{11}}{2} - \frac{\mathbf{c}_2}{2} \tag{3.2.10}$$

$$\mathbf{p}_{020} = \mathbf{x}_{11} \tag{3.2.11}$$

#### 4. 平行に近い頂点法線を補間する際の形状の乱れ

##### 4.1 長田セグメントの湾曲

日本ユニシスでは、長田パッチを三角形メッシュに膨らみを持たせて補間する技術として応用検討した（文献<sup>[6]</sup>pp.6）。この結果、ほとんどのテストケースで長田パッチは期待通りの好結果であったが、三角形の頂点に与えられる単位法線ベクトル方向が平行に近いとき、パッチ形状が乱れる場合のあることがわかった（図6）。

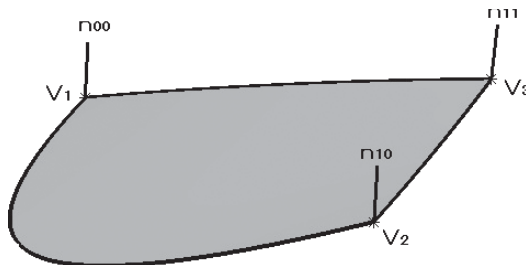


図6 平行に近い頂点法線を補間する際のパッチ形状の乱れ

パッチ形状の乱れの原因に関して、該当する長田セグメント（図6で大きく湾曲した部分）を等価な2次ベジエ曲線

$$\mathbf{x}(\xi) = \mathbf{p}_{20}(1-\xi)^2 + \mathbf{p}_{11} \cdot 2(1-\xi)\xi + \mathbf{p}_{02}\xi^2 \tag{4.1.1}$$

で表現して説明する。ここで、 $\mathbf{p}_{20}$ は始点 $\mathbf{x}_0$ 、 $\mathbf{p}_{02}$ は終点 $\mathbf{x}_1$ であり、中間制御点 $\mathbf{p}_{11}$ は、2章(条件C)より、弦の midpoint  $(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1)/2$  から、両接平面の交線に下した垂線の足である。

曲線の湾曲現象は、頂点法線 $\mathbf{n}_0$ 、 $\mathbf{n}_1$ が平行に近く、両接平面が始終点を結ぶ弦から大きく隔たった位置に交線を持つ場合に発生する。このとき、弦の midpoint から接平面交線に下した垂線の足は、図7のように弦に対して大きく横にずれ、結果として2次ベジエ曲線は湾曲するに至る。

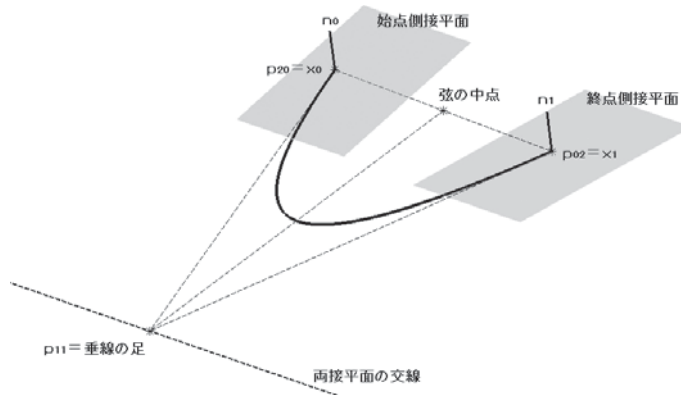


図7 長田セグメントと等価な2次ベジエ曲線の湾曲

#### 4.2 湾曲をもたらす要因と対策

長田セグメントは2次多項式曲線であり、放物線の一部を切り取った形状であるため、平面曲線である。曲線が乗っている平面は始終点を結ぶ弦を含む平面であり、本稿では、「曲線平面」と呼ぶ。さて、2次多項式曲線を2次ベジエ曲線(4.1.1)として表現する場合には、中間制御点 $\mathbf{p}_{11}$ の位置を選ぶことにより、曲線平面が定まる。長田セグメントの場合は、 $\mathbf{p}_{11}$ を2章(条件C)のように決め、両接平面の交線の位置関係によっては、図7に示すように曲線平面が接平面と平行に近い状態まで倒れるため、長田セグメントの湾曲が起きる。

長田論文<sup>[2]</sup>では、この問題に対する数値的な分析が行われ、対策には三角形メッシュの分割を細かくすることが推奨されている。確かにメッシュを十分に細分すると、法線ベクトルと弦は直交に近づくので曲率パラメタ $\mathbf{c}=0$ で長田セグメントが弦と一致しても法線直交条件は破綻しない。しかし、現実の応用では三角形メッシュを随意に細かくできず、与えられた粗さのメッシュで処理を進めなければならない場合も多い。そこで、曲線の湾曲を防止する最初の対策の出発点として、本稿では

曲線平面は、両接平面 $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{n}_0\}$ 、 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{n}_1\}$ に対して、  
可能な限り直交に近づける

としたい。具体的には次の(対策1)を採用する：

(対策1)

始終点を結ぶ弦を含み、始点側接平面 $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{n}_0\}$ に直交する平面 $\Pi_0$ と、

弦を含み、終点側接平面  $\{x_1, n_1\}$  に直交する平面  $\Pi_1$  との2等分平面のうち、 $\Pi_0, \Pi_1$  となす角の小さい方を曲線平面  $\Pi$  として選択する (図8).

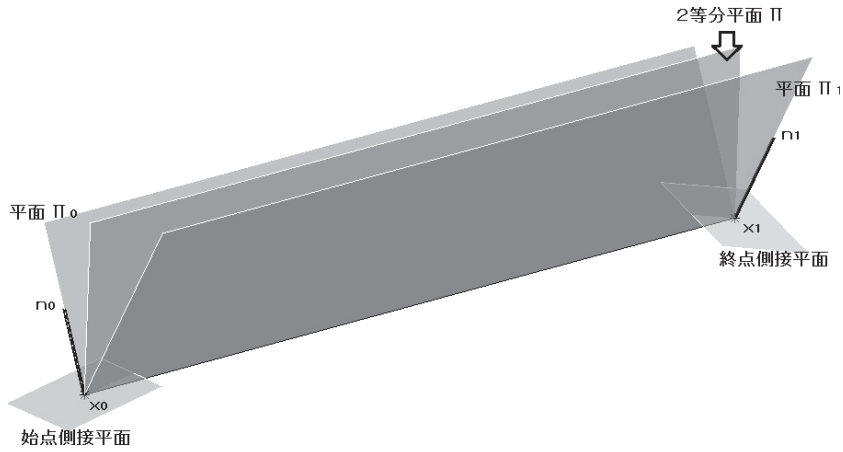


図8 対策1 (曲線平面を両接平面と直交に近づける)

しかし、図7のように“両接平面の交線が弦から大きく隔たっている場合”には、対策1だけでは問題は解決しない。始終点で各接平面に接する2次ベジエ曲線(4.1.1)を得るには、中間制御点  $p_{11}$  は両接平面上にあるべきなので、対策1で決めた曲線平面と接平面交線との交点位置に配置しなければならない。このため、接平面交線位置が弦に対して不適切な位置にあると、 $p_{11}$  が弦の両端点での直交平面で挟まれた範囲の外に出てしまうことが起きる (図9).

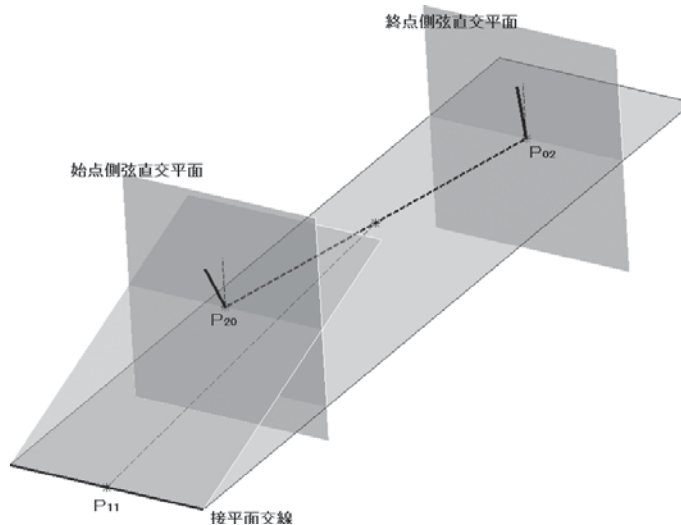


図9 2次ベジエ曲線の中間制御点が範囲外

図9の状況を(4.1.1)式の記号で数式として表現すると、

$$\langle p_{11} - p_{20}, p_{02} - p_{20} \rangle < 0 \text{ または } \langle p_{02} - p_{11}, p_{02} - p_{20} \rangle < 0 \tag{4.2.1}$$

である。中間制御点と端点との差ベクトルは、端点での曲線の接線方向に対応しているので、(4.2.1)の前半の不等式は、始点での接線方向が弦の方向と逆行していることを表し（図10a）、後半の不等式は、終点での接線方向が弦の方向と逆行していることを表している（図10b）。

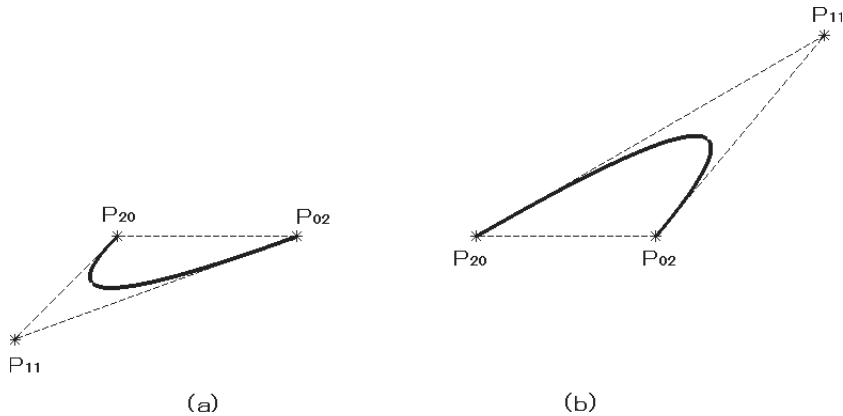


図10 2次ベジエ曲線の接線方向と弦の逆行

“両接平面の交線が弦から大きく隔たっていると、接線方向と弦の方向が逆行する”問題は、2次ベジエ曲線である以上、避けられない。各端点での曲線への接線は、曲線平面と各接平面との交線である。中間制御点は、この接線上に位置するが、相手端点の接平面との交点位置が弦の方向と逆行する場合、逆行を回避するには中間制御点を接線上、相手端点側に配置しなければならない。これは2次ベジエ曲線では不可能であり、ベジエ曲線の次数を3以上にしなければ解決しない。本稿では条件を満たす最低次数である3次を採用し、(対策2)とする。

(対策2)

曲線式として対策1で定めた曲線平面上に乗る3次ベジエ曲線を採用する。

## 5. 粹線の3次化と3次三角ベジエ曲面

本章では、4.2節で導出した(対策2)について詳細を説明する。

### 5.1 粹線の3次化

(3.1.2)より、3次ベジエ曲線の曲線式は、

$$\mathbf{x}(\xi) = \mathbf{p}_{30}(1-\xi)^3 + \mathbf{p}_{21} \cdot 3(1-\xi)^2\xi + \mathbf{p}_{12} \cdot 3(1-\xi)\xi^2 + \mathbf{p}_{03}\xi^3 \quad (5.1.1)$$

である。4個の制御点  $\mathbf{p}_{30}$ ,  $\mathbf{p}_{21}$ ,  $\mathbf{p}_{12}$ ,  $\mathbf{p}_{03}$  は同一平面上にあるとは限らないので、一般に3次ベジエ曲線は平面曲線とは限らないが、本稿では次の(条件D)を課し、平面曲線として考える：

(条件D)

3次ベジエ曲線の4制御点  $\mathbf{p}_{30}$ ,  $\mathbf{p}_{21}$ ,  $\mathbf{p}_{12}$ ,  $\mathbf{p}_{03}$  は、(対策1)の曲線平面  $\Pi$  上に配置する（図11）。

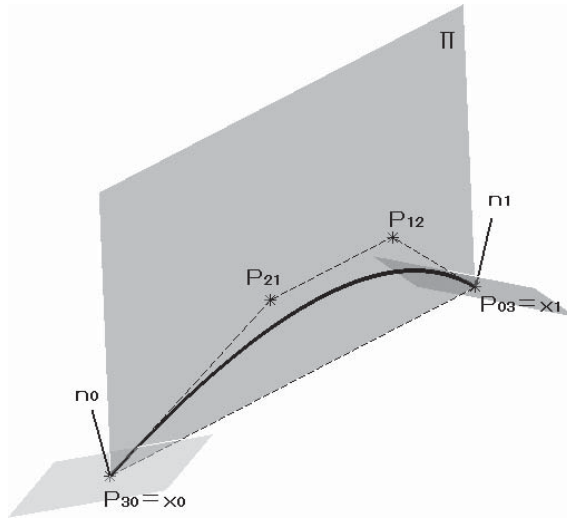


図 11 3次ベジエ平面曲線

但し、3次では中間制御点が  $p_{21}$ ,  $p_{12}$  の2個になり、その決め方を別途案出する必要が生ずるが、本稿では2次ベジエ曲線の形状を可能な限り継承する手法を採用する。

2次多項式は、特別な3次多項式なので、2次ベジエ曲線を3次ベジエ曲線と考えたときの制御点を計算する。これは、「ベジエ曲線の次数上げ」<sup>[5]</sup>として知られた手法を用いて、2次ベジエ曲線に定数1を表す恒等式  $1 = (1 - \xi) + \xi$  を掛けて、形式的に3次式にすればよい。なお、次数上げしても曲線の形状は変化しないことに注意する：

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(\xi) &= \mathbf{p}_{20}(1 - \xi)^2 + \mathbf{p}_{11} \cdot 2(1 - \xi)\xi + \mathbf{p}_{02}\xi^2 \\
 &= \{\mathbf{p}_{20}(1 - \xi)^2 + \mathbf{p}_{11} \cdot 2(1 - \xi)\xi + \mathbf{p}_{02}\xi^2\} \{(1 - \xi) + \xi\} \\
 &= \mathbf{p}_{20}(1 - \xi)^3 + (\mathbf{p}_{20} + 2\mathbf{p}_{11}) \cdot (1 - \xi)^2\xi + (2\mathbf{p}_{11} + \mathbf{p}_{02}) \cdot (1 - \xi)\xi^2 + \mathbf{p}_{02}\xi^3 \tag{5.1.2} \\
 &= \mathbf{p}_{20}(1 - \xi)^3 + \left(\frac{\mathbf{p}_{20} + 2\mathbf{p}_{11}}{3}\right) \cdot 3(1 - \xi)^2\xi + \left(\frac{2\mathbf{p}_{11} + \mathbf{p}_{02}}{3}\right) \cdot 3(1 - \xi)\xi^2 + \mathbf{p}_{02}\xi^3
 \end{aligned}$$

こうして、3次ベジエ曲線(5.1.1)と2次ベジエ曲線を3次に次数上げた曲線との制御点の関係式が得られる：

$$\mathbf{p}_{30} = \mathbf{p}_{20} \tag{5.1.3}$$

$$\mathbf{p}_{21} = \frac{\mathbf{p}_{20} + 2\mathbf{p}_{11}}{3} \tag{5.1.4}$$

$$\mathbf{p}_{12} = \frac{2\mathbf{p}_{11} + \mathbf{p}_{02}}{3} \tag{5.1.5}$$

$$\mathbf{p}_{03} = \mathbf{p}_{02} \tag{5.1.6}$$

但し、両端点での座標値と法線から曲線を作るので、接線方向の正負は必要に応じて反転しても構わないことから、2次ベジエ曲線の接線方向が弦の方向と逆行している場合(4.2.1)には、逆行しない側に補正した制御点から3次ベジエ曲線の制御点を決めることとする。すなわち、

$$p_{21} = \frac{p_{20} + 2p_{11}^{(0)}}{3} \tag{5.1.4a}$$

$$p_{12} = \frac{2p_{11}^{(1)} + p_{02}}{3} \tag{5.1.5a}$$

とし、補正制御点  $p_{11}^{(0)}$ ,  $p_{11}^{(1)}$  は、逆行が起きていない場合には、2次ベジエ曲線の制御点  $p_{11}$  に一致し、逆行が起きている場合には、2次ベジエ曲線の各端点の接線上で相手側（始点側接線では終点側、終点側接線では始点側）の接線を曲線平面上で弦について線対称に配置して得られる交点とする。始点側を例に説明する（図12）。始点  $p_{20}$  から両接線の交点  $p_{11}$  に向かう方向は、弦の方向と逆行しているので、交点  $p_{11}$  自体を不採用とする。拘束条件は制御点が接線上にあることであり、接線と弦とのなす角度を維持するため、相手＝終点側接線を弦について線対称に配置（上向き白抜き矢印）して始点側接線と交点  $p_{11}^{(0)}$  を求め、逆に始点側接線を弦について線対称に配置（下向き白抜き矢印）して終点側接線と交点  $p_{11}^{(1)}$  を求めてから、(5.1.4a), (5.1.5a)で3次ベジエ曲線の制御点  $p_{21}$ ,  $p_{12}$  を決めると、逆行が回避される。

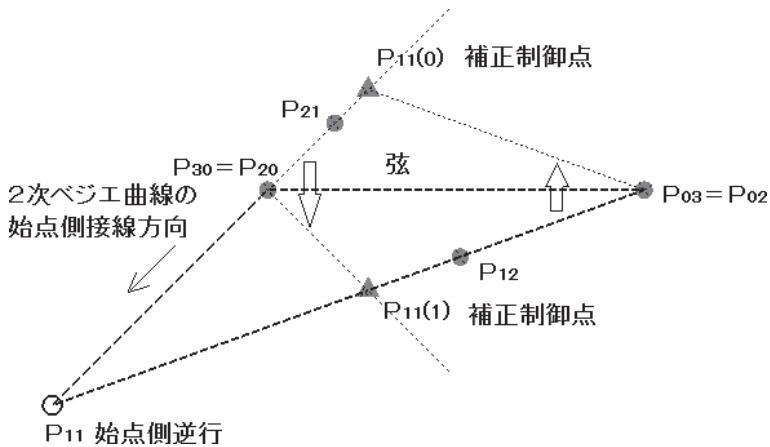


図12 補正制御点の決め方

(5.1.4a), (5.1.5a)を数式的に述べると次のようになる。ここで、 $p_{30}$  から  $p_{21}$  までの距離を  $d_s$ ,  $p_{03}$  から  $p_{12}$  までの距離を  $d_e$  とする。  $d_s$ ,  $d_e$  は未知であるとして、その算出式を導く。弦の長さを  $L$ , 始点側接線と弦のなす角度を  $\theta_s$ , 終点側接線と弦のなす角度を  $\theta_e$  とする。図12のように、予め逆行を排除しておくことで、  $0 \leq \theta_s, \theta_e \leq 90^\circ$  と考えてよい。

まず、(5.1.4a), (5.1.5a)は、  $d_s$ ,  $d_e$  が各々補正制御点  $p_{11}^{(0)}$ ,  $p_{11}^{(1)}$  までの距離の  $2/3$  であることを意味していることに注意すると、図13より

$$L = \left(\frac{3}{2}d_s\right)\cos\theta_s + \left(\frac{3}{2}d_e\right)\cos\theta_e \tag{5.1.7}$$

$$\left(\frac{3}{2}d_s\right)\sin\theta_s = \left(\frac{3}{2}d_e\right)\sin\theta_e \tag{5.1.8}$$

が成り立つ。

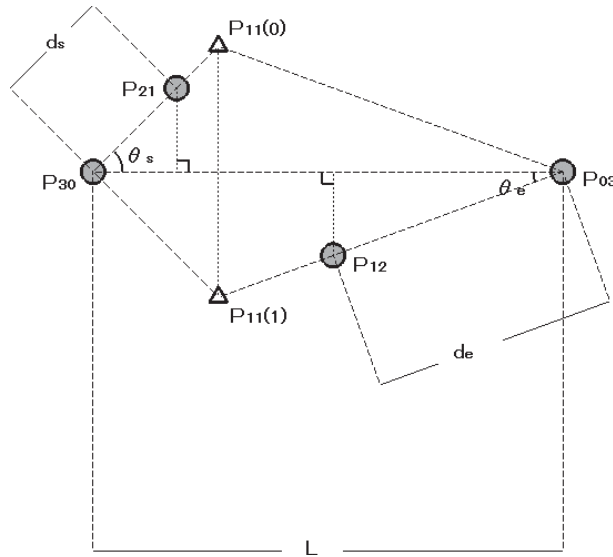


図 13 3次ベジエ制御点の決め方

上式を未知数  $d_s$ ,  $d_e$  についての連立方程式と考えて解くと,

$$d_s \cos \theta_s = \left( \frac{\tan \theta_e}{\tan \theta_s + \tan \theta_e} \right) \cdot \left( \frac{2L}{3} \right) \tag{5.1.9}$$

$$d_e \cos \theta_e = \left( \frac{\tan \theta_s}{\tan \theta_s + \tan \theta_e} \right) \cdot \left( \frac{2L}{3} \right) \tag{5.1.10}$$

を得る. ここで, 弦と接線との角度  $\theta = \theta_s, \theta_e$  に関して  $\tan \theta$  計算上の上下限切断として, 下限値  $\varepsilon$ , 上限値  $\Omega$  を定めて

$$\tan \theta \leq \varepsilon \Rightarrow \tan \theta = \varepsilon \tag{5.1.11}$$

$$\tan \theta \geq \Omega \Rightarrow \tan \theta = \Omega \tag{5.1.12}$$

とし, (5.1.9), (5.1.10) 右辺計算時の不安定要因を解消する. また, (5.1.9), (5.1.10) の左辺は, 制御点間距離を弦に正射影することを表している. 但し, 接線と弦とのなす角度が直角に近づくと, (5.1.9), (5.1.10) の左辺の  $\cos$  値が小さくなる結果, 制御点間距離が過大になるので, 文献<sup>[5]</sup> pp.116-117 で推奨されている “接線と弦とのなす角度が60度を超える場合, 正射影を抑止し制御点間距離の過大を防ぐ” という処方を採用して, 最終的に

$$d_s = \begin{cases} \left( \frac{\tan \theta_e}{\tan \theta_s + \tan \theta_e} \right) \frac{1}{\cos \theta_s} \cdot \left( \frac{2L}{3} \right) & \text{if } \theta_s \leq 60^\circ \\ \left( \frac{\tan \theta_e}{\tan \theta_s + \tan \theta_e} \right) \cdot \left( \frac{4L}{3} \right) & \text{if } \theta_s > 60^\circ \end{cases} \tag{5.1.13}$$

$$d_e = \begin{cases} \left( \frac{\tan \theta_s}{\tan \theta_s + \tan \theta_e} \right) \frac{1}{\cos \theta_e} \cdot \left( \frac{2L}{3} \right) & \text{if } \theta_e \leq 60^\circ \\ \left( \frac{\tan \theta_s}{\tan \theta_s + \tan \theta_e} \right) \cdot \left( \frac{4L}{3} \right) & \text{if } \theta_e > 60^\circ \end{cases} \quad (5.1.14)$$

とする. すなわち, (5.1.13), (5.1.14)で算出した  $d_s$ ,  $d_e$  を用い,

$\mathbf{p}_{21}$  = 始点  $\mathbf{p}_{30}$  から始点側接線に沿って終点側に距離  $d_s$  だけ進んだ点

$\mathbf{p}_{12}$  = 終点  $\mathbf{p}_{03}$  から終点側接線に沿って始点側に距離  $d_e$  だけ戻った点

として, 3次ベジエ曲線の間接制御点を定める. なお, 上記の決め方は両接線の交点を陽に用いないので, 両接線がちょうど平行の場合でも有効であることに注意されたい.

## 5.2 3次三角ベジエ曲面

長田パッチの3本の枠線を3次ベジエ曲線に変更したので, ベジエ形式での曲面式は3次の三角ベジエ曲面を用いなければならない.

(3.2.2)より, 3次三角ベジエ曲面は,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u, v, w) = & \mathbf{p}_{003} \cdot w^3 + \mathbf{p}_{102} \cdot 3uw^2 + \mathbf{p}_{201} \cdot 3u^2w + \mathbf{p}_{300} \cdot u^3 \\ & + \mathbf{p}_{012} \cdot 3vw^2 + \mathbf{p}_{111} \cdot 6uvw + \mathbf{p}_{210} \cdot 3u^2v \\ & + \mathbf{p}_{021} \cdot 3v^2w + \mathbf{p}_{120} \cdot 3uv^2 + \mathbf{p}_{030} \cdot v^3 \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

である. ここで, 長田パッチの3頂点との対応は,

$$\mathbf{p}_{003} = \mathbf{x}_{00} \quad (5.2.2)$$

$$\mathbf{p}_{300} = \mathbf{x}_{10} \quad (5.2.3)$$

$$\mathbf{p}_{030} = \mathbf{x}_{11} \quad (5.2.4)$$

であり, パラメタとの対応は,  $u = \eta - \zeta$ ,  $v = \zeta$ ,  $w = 1 - \eta$  で, 各枠線には, 5.1節の方法で決められた3次ベジエ曲線を次のように当てはめる:

$$\mathbf{x}(\eta, 0, 1 - \eta) = \mathbf{x}_{00}(1 - \eta)^3 + \mathbf{p}_{102} \cdot 3(1 - \eta)^2\eta + \mathbf{p}_{201} \cdot 3(1 - \eta)\eta^2 + \mathbf{x}_{10}\eta^3 \quad (5.2.5)$$

$$\mathbf{x}(1 - \zeta, \zeta, 0) = \mathbf{x}_{10}(1 - \zeta)^3 + \mathbf{p}_{210} \cdot 3(1 - \zeta)^2\zeta + \mathbf{p}_{120} \cdot 3(1 - \zeta)\zeta^2 + \mathbf{x}_{11}\zeta^3 \quad (5.2.6)$$

$$\mathbf{x}(0, \eta, 1 - \eta) = \mathbf{x}_{00}(1 - \eta)^3 + \mathbf{p}_{012} \cdot 3(1 - \eta)^2\eta + \mathbf{p}_{021} \cdot 3(1 - \eta)\eta^2 + \mathbf{x}_{11}\eta^3 \quad (5.2.7)$$

ここで, (5.2.5)では  $v = \zeta = 0$  なので  $u = \eta$ , (5.2.6)では  $w = 1 - \eta = 0$  なので  $\eta = 1$  であり  $u = 1 - \zeta$ , (5.2.7)では  $u = \eta - \zeta = 0$  なので  $v = \zeta = \eta$  に注意する.

こうして, 3次三角ベジエ曲面の10個の制御点のうち,  $\mathbf{p}_{111}$  を除く9個は3本の枠線から定まるが,  $\mathbf{p}_{111}$  を決める方法が別途必要である. これについては, 次章で論ずる.



### 6. 三角クーンズ曲面

与えられた枠線だけから曲面内部を内挿する手法として良く知られているのは、クーンズ曲面である (文献<sup>[5]</sup>pp.326-347). クーンズ曲面は、一つの枠線とそれに対向する枠線とから1次式補間される線織面 (ruled surface) を全組み合わせについて足し合わせ、境界条件の余分を調整して定義される曲面であり、枠線間の1次補間から“ピンと張った”曲面が得られる特性があるので、長田パッチ定義式を拡張する曲面式に適している。

本稿で必要とするのは、枠線3本で囲まれた曲線三角形領域を内挿する三角クーンズ曲面式である。文献<sup>[5]</sup>21.6節「三角クーンズ・パッチ」によれば、三角クーンズ曲面式には複数の種類が知られているが、同文献で紹介されているのは、 $u, v, w$  に関して有理式の曲面式なので、本稿では以下、 $u, v, w$  の多項式で定義される三角クーンズ曲面式を独自に導出する。

#### 6.1 三角クーンズ曲面式の導出

5章の記号を踏まえて、 $u = \eta - \zeta, v = \zeta, w = 1 - \eta$  とし、3本の枠線を

$$\mathbf{x}(\eta, 0, 1 - \eta) = \mathbf{p}_{003}(1 - \eta)^3 + \mathbf{p}_{102} \cdot 3(1 - \eta)^2 \eta + \mathbf{p}_{201} \cdot 3(1 - \eta)\eta^2 + \mathbf{p}_{300}\eta^3 \tag{6.1.1}$$

$$\mathbf{x}(1 - \zeta, \zeta, 0) = \mathbf{p}_{300}(1 - \zeta)^3 + \mathbf{p}_{210} \cdot 3(1 - \zeta)^2 \zeta + \mathbf{p}_{120} \cdot 3(1 - \zeta)\zeta^2 + \mathbf{p}_{030}\zeta^3 \tag{6.1.2}$$

$$\mathbf{x}(0, \eta, 1 - \eta) = \mathbf{p}_{003}(1 - \eta)^3 + \mathbf{p}_{012} \cdot 3(1 - \eta)^2 \eta + \mathbf{p}_{021} \cdot 3(1 - \eta)\eta^2 + \mathbf{p}_{030}\eta^3 \tag{6.1.3}$$

とする。(6.1.1)は  $v=0$  枠線、(6.1.2)は  $w=0$  枠線、(6.1.3)は  $u=0$  枠線である (図14)。

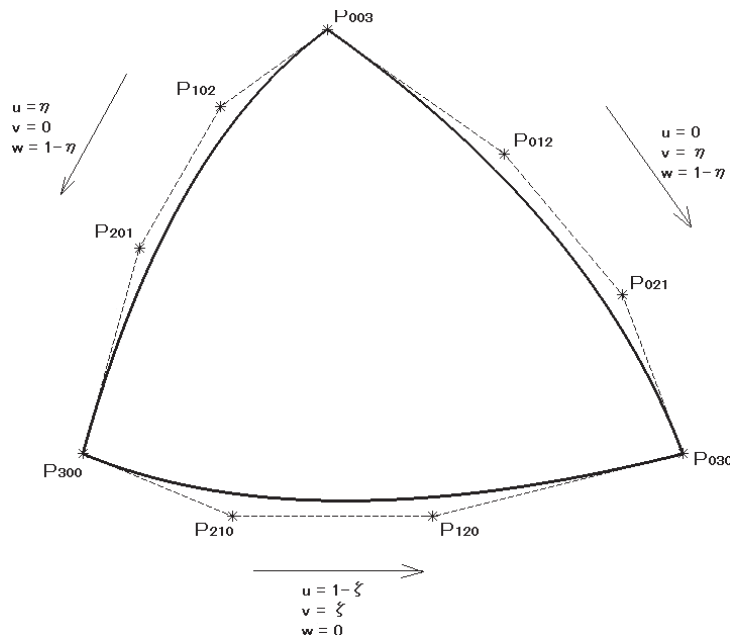


図14 3本の枠線とパラメタの対応

まず、 $v=0$  枠線 (6.1.1) と  $u=0$  枠線 (6.1.3) 間の1次補間で得られる線織面  $\mathbf{S}_1(u, v, w)$  は対

応する枠線の制御点を結ぶ線分の等分点を制御点とする三角ベジエ曲面である (図 15) :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_1(u, v, w) = & \mathbf{p}_{003} \cdot w^3 + \mathbf{p}_{102} \cdot 3uw^2 + \mathbf{p}_{201} \cdot 3u^2w + \mathbf{p}_{300} \cdot u^3 \\
 & + \mathbf{p}_{012} \cdot 3vw^2 + \left\{ \frac{\mathbf{p}_{201} + \mathbf{p}_{021}}{2} \right\} \cdot 6uvw + \left\{ \frac{2\mathbf{p}_{300} + \mathbf{p}_{030}}{3} \right\} \cdot 3u^2v \\
 & + \mathbf{p}_{021} \cdot 3v^2w + \left\{ \frac{\mathbf{p}_{300} + 2\mathbf{p}_{030}}{3} \right\} \cdot 3uv^2 + \mathbf{p}_{030} \cdot v^3
 \end{aligned} \tag{6.1.4}$$

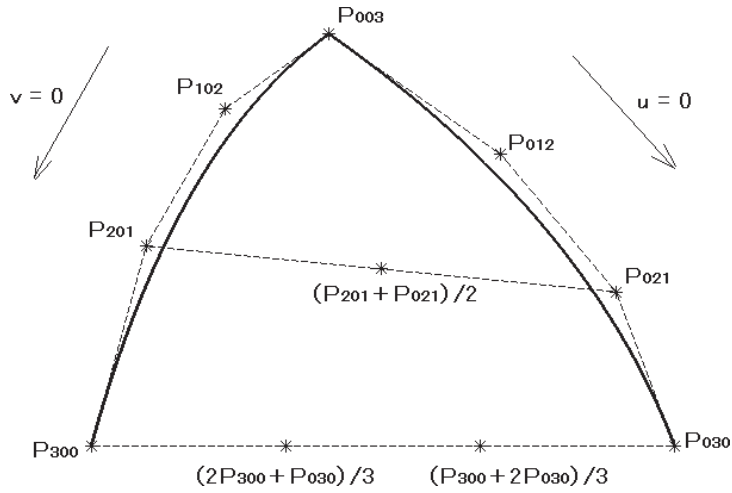


図 15  $v=0$  枠線と  $u=0$  枠線間の 1 次補間で得られる線織面

次に,  $u=0$  枠線(6.1.3)と  $w=0$  枠線(6.1.2)を  $\eta=\zeta$  と対応させて, 線織面  $\mathbf{S}_2(u, v, w)$  を構成すると

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_2(u, v, w) = & \mathbf{p}_{003} \cdot w^3 + \left\{ \frac{2\mathbf{p}_{003} + \mathbf{p}_{300}}{3} \right\} \cdot 3uw^2 + \left\{ \frac{\mathbf{p}_{003} + 2\mathbf{p}_{300}}{3} \right\} \cdot 3u^2w + \mathbf{p}_{300} \cdot u^3 \\
 & + \mathbf{p}_{012} \cdot 3vw^2 + \left\{ \frac{\mathbf{p}_{012} + \mathbf{p}_{210}}{2} \right\} \cdot 6uvw + \mathbf{p}_{210} \cdot 3u^2v \\
 & + \mathbf{p}_{021} \cdot 3v^2w + \mathbf{p}_{120} \cdot 3uv^2 + \mathbf{p}_{030} \cdot v^3
 \end{aligned} \tag{6.1.5}$$

である. 最後に,  $v=0$  枠線(6.1.1)と  $w=0$  枠線(6.1.2)は, 向きが異なるので,  $\eta=1-\zeta$  と対応させ, 線織面  $\mathbf{S}_3(u, v, w)$  を構成すると

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_3(u, v, w) = & \mathbf{p}_{003} \cdot w^3 + \mathbf{p}_{102} \cdot 3uw^2 + \mathbf{p}_{201} \cdot 3u^2w + \mathbf{p}_{300} \cdot u^3 \\
 & + \left\{ \frac{2\mathbf{p}_{003} + \mathbf{p}_{030}}{3} \right\} \cdot 3vw^2 + \left\{ \frac{\mathbf{p}_{102} + \mathbf{p}_{120}}{2} \right\} \cdot 6uvw + \mathbf{p}_{210} \cdot 3u^2v \\
 & + \left\{ \frac{\mathbf{p}_{003} + 2\mathbf{p}_{030}}{3} \right\} \cdot 3v^2w + \mathbf{p}_{120} \cdot 3uv^2 + \mathbf{p}_{030} \cdot v^3
 \end{aligned} \tag{6.1.6}$$

となる.

さて, これら 3 曲面  $\mathbf{S}_1(u, v, w)$ ,  $\mathbf{S}_2(u, v, w)$ ,  $\mathbf{S}_3(u, v, w)$  を足し合わせると, 各境界には各枠

線が2回ずつ登場し、さらに頂点間を1次補間した線分が各1回登場していることがわかる。そこで、3頂点から1次補間で定義される1次三角ベジエ曲面

$$\mathbf{S}_4(u, v, w) = \mathbf{p}_{003} \cdot w + \mathbf{p}_{300} \cdot u + \mathbf{p}_{030} \cdot v \quad (6.1.7)$$

を1回分差し引くことを考える。但し、(6.1.7)は1次多項式曲面なので、他の3曲面の次数に合わせるため、3次に次数上げて

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_4(u, v, w) = & \mathbf{p}_{003} \cdot w^3 + \left\{ \frac{2\mathbf{p}_{003} + \mathbf{p}_{300}}{3} \right\} \cdot 3uw^2 + \left\{ \frac{\mathbf{p}_{003} + 2\mathbf{p}_{300}}{3} \right\} \cdot 3u^2w + \mathbf{p}_{300} \cdot u^3 \\ & + \left\{ \frac{2\mathbf{p}_{003} + \mathbf{p}_{030}}{3} \right\} \cdot 3vw^2 + \left\{ \frac{\mathbf{p}_{003} + \mathbf{p}_{300} + \mathbf{p}_{030}}{3} \right\} \cdot 6uvw + \left\{ \frac{2\mathbf{p}_{300} + \mathbf{p}_{030}}{3} \right\} \cdot 3u^2v \\ & + \left\{ \frac{\mathbf{p}_{003} + 2\mathbf{p}_{030}}{3} \right\} \cdot 3v^2w + \left\{ \frac{\mathbf{p}_{300} + 2\mathbf{p}_{030}}{3} \right\} \cdot 3uv^2 + \mathbf{p}_{030} \cdot v^3 \end{aligned} \quad (6.1.8)$$

とし、

$$\mathbf{S}(u, v, w) = \{\mathbf{S}_1(u, v, w) + \mathbf{S}_2(u, v, w) + \mathbf{S}_3(u, v, w) - \mathbf{S}_4(u, v, w)\} / 2 \quad (6.1.9)$$

とすれば、各境界で対応する各枠線に一致する内挿曲面が定義される。これが、本稿で提案する三角クーンズ曲面である。

定義式(6.1.9)から、3次三角ベジエ曲面の中央制御点を計算すると、

$$\mathbf{p}_{111} = \left( \frac{\mathbf{p}_{201} + \mathbf{p}_{021}}{4} \right) + \left( \frac{\mathbf{p}_{012} + \mathbf{p}_{210}}{4} \right) + \left( \frac{\mathbf{p}_{102} + \mathbf{p}_{120}}{4} \right) - \left( \frac{\mathbf{p}_{003} + \mathbf{p}_{300} + \mathbf{p}_{030}}{6} \right) \quad (6.1.10)$$

となる。

こうして、与えられた3頂点と法線を補間する曲面パッチとして、5.1節の方法で曲線平面と3次ベジエ曲線を当てはめて各枠線を補間し、これらから(6.1.9)の定義式による三角クーンズ曲面を構成して3次三角ベジエ曲面が得られる。この曲面式を本稿では、「3次長田パッチ」とよぶ。

2次三角ベジエ曲面として表現できるオリジナル長田パッチと3次長田パッチの違いは、

- ① オリジナル長田パッチは2次三角ベジエ曲面として表現できるが、3次長田パッチは3次三角ベジエ曲面として表現される、
- ② 3次長田パッチでは、曲線平面が双方の接平面に対して可能な限り直交に近い状態にある、
- ③ 3次長田パッチは、法線がちょうど平行の場合、および平行に近い場合でも安定して計算される

の3点である。

### 7. 3次長田パッチの評価

本章では、本稿で提案する3次長田パッチが、オリジナル長田パッチで面質良好な場合には同等の面質を与え、オリジナル長田パッチでは面形状が乱れる場合でも面形状の乱れを抑止できることを示す。

まず、図 16 は、オリジナル長田パッチで面質良好な場合で、左(a)がオリジナル長田パッチによる補間、右(b)が3次長田パッチによる補間である：

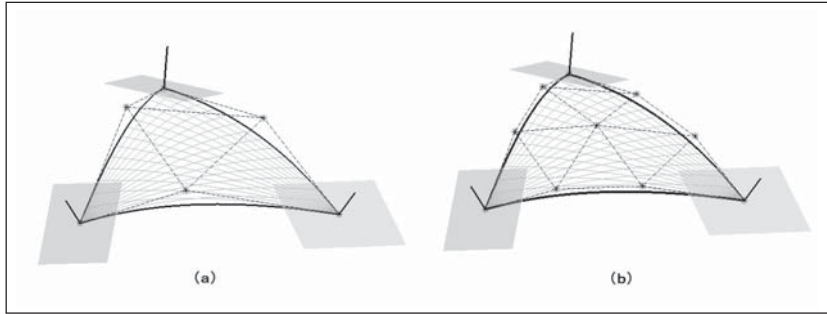


図 16 オリジナル長田パッチで面質良好な場合

次に、図 17 は、オリジナル長田パッチでは面形状が乱れる場合で、左(a)がオリジナル長田パッチによる補間、右(b)が3次長田パッチによる補間である：

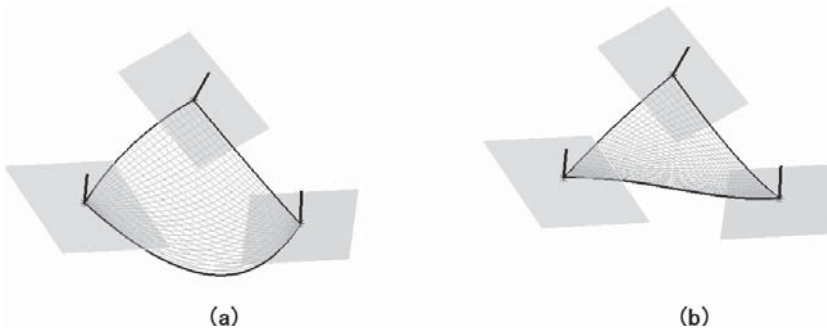


図 17 オリジナル長田パッチでは面形状が乱れる場合

3次長田パッチによる補間では面形状の乱れが抑止されていることがわかる。図 18 は、オリジナル長田パッチで枠線が大きく湾曲している箇所拡大図である。図 17(a)(b)を重ね合わせ、左下頂点から右下頂点方面に向かう視線方向で表示している。

このような箇所では、双方の接平面と曲線平面との交線により枠線の接線方向を決めると、しばしばS字状の曲線が得られる。これは長田論文<sup>[1][2]</sup>で2次多項式による表現能力を超えた場合と位置付けられており、同論文ではメッシュ分割を細かくして解消することが推奨されている。メッシュ分割の粗さを随意に調整できる場合には、この通りであるが、現実には与えられたメッシュ分割のまま処理を進めなければならない場合も多い。このようなとき、2次多項式で表すことが不適切なケースに対して、3次多項式の適用によりS字状の凹凸反転が発生しても、枠線の大きな湾曲や逆行など面形状の乱れを抑止する対策は有効と考える。

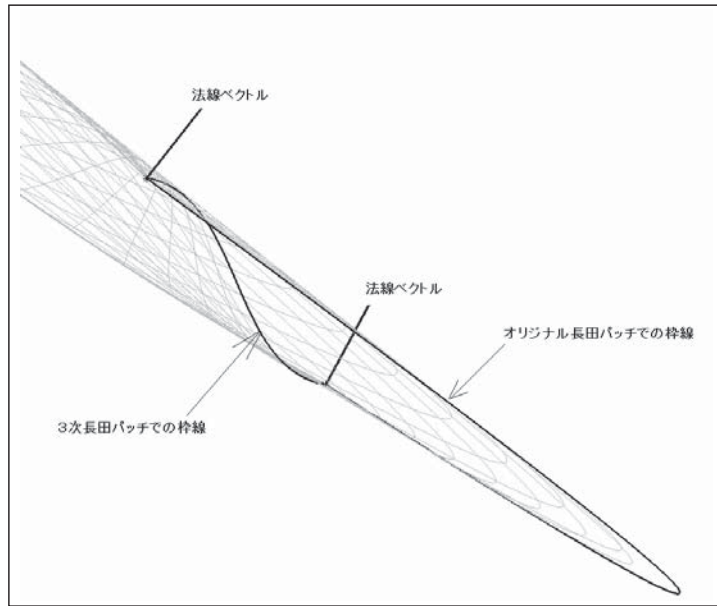


図 18 オリジナル長田パッチで面形状が乱れる箇所の拡大図

## 8. おわりに

本稿では、三角形の各頂点に与えられた法線方向が平行に近く、それらが定める接平面どうしの交線が三角形の辺から遠くはずれている場合に、オリジナル長田パッチの面形状が乱れる現象への対策を講じた。まず、パッチの枠線となる曲線の乗る曲線平面を双方の接平面と直交に近い状態で交差させ、接線方向が枠線始終点を結ぶ弦の方向と逆行しないように設定する。このようにすると、2次ベジエ曲線では補間できない場合が生ずるので、枠線の曲線式として3次ベジエ曲線を採用する。但し、2次ベジエ曲線が無理なく当てはまる場合には2次ベジエ曲線の次数上げになるよう上位互換性に考慮する。枠線の3次化により、内挿曲面は3次三角ベジエ曲面になるが、面中央制御点の自由度を決める必要が生ずる。本稿では、長田パッチの趣旨に沿う手法として、枠線で囲まれた領域内部にピンと張った内挿曲面を与える三角クーンズ曲面式の一つを導出して、面中央制御点位置を決めた。これを本稿では3次長田パッチと呼ぶ。

3次長田パッチへの拡張により、オリジナル長田パッチでは面形状が乱れる場合でも、形状乱れを抑制した曲面補間が実現する。

長田論文<sup>[2]</sup>pp.77では、2次多項式曲面の形状表現能力を超えた事態に対して、分割を細かくして対応することが推奨されているが、与えられた三角形メッシュの粗さのままで形状処理を進めなければならない場合には、本稿で提案する3次長田パッチの適用は有効であると考えられる。

- 参考文献 [1] Takashi Nagata, "Simple local interpolation of surfaces using normal vectors", Computer Aided Geometric Design, ELSEVIER, Vol.22, No.4, May 2005, pp.327-347.  
 [2] 長田隆, "三次元力学解析に関わる新しい要素技術", 理研シンポジウム ものづくり情報技術統合化研究 第4回, 理化学研究所, 2004, pp.75-86.

- [ 3 ] 長田隆, “ $G^1$  長田パッチの精度検証”, VCAD システム研究 2008 ものづくりから細胞まで 理研シンポジウム 平成 20 年, 理化学研究所, 2008, pp.64-68.
- [ 4 ] Takashi Nagata, “Smooth Local Interpolation of Surfaces Using Normal Vectors”, Journal of Applied Mathematics, Hindawi publishing Corporation, Volume 2010, Article ID 952420, pages 24, 2010.
- [ 5 ] Gerald Farin, “Curves and Surfaces for CAGD A Practical Guide”, 4<sup>th</sup> edition, Academic Press, 1997.
- [ 6 ] 谷本茂樹, “曲面の力学的変形とその応用”, ユニシス技報, 日本ユニシス, Vol.30, No.1, 通巻 104 号, 2010 年 6 月, pp.1-12.

**執筆者紹介** 清水 保 弘 (Shimizu Yasuhiro)

1985 年日本ユニバック (現日本ユニシス) 入社. CAD システムの形状処理機能開発に従事. 2011 年 4 月より日本ユニシス・エクセリューションズに出向し, 現在に至る. 2000 年 4 月から 2004 年 3 月まで東京大学大学院数理科学研究科連携併任講座客員教授. 2012 年 4 月から理化学研究所客員研究員. 日本数学会会員, 情報処理学会会員.

