

意匠面創成のための曲率単調曲線生成技術

The Technique Generating Curves with Monotonous Curvatures
for Aesthetic Surface Creation

清水保弘

要約 意匠面とは、乗用車の外板形状のように意匠性を要求される製品の表面形状である。これをCADで設計するための重要な要件の一つとして、曲率単調曲線の生成技術を解説する。

調査の結果、Roulierらの論文が応用微分幾何的な基礎論文であることが判明した。本稿では、この論文の骨子を解説するとともに、曲率単調曲線生成機能の実装にどのように適用すればよいかの展望を論ずる。

Abstract The aesthetic surfaces refer to the surface shapes of the industrial products required for aesthetic properties, such as the outer panel shapes of passenger cars. As a result of our study of predecessor's researches, we have found that the paper by Roulier et al. deals with the fundamentals of curves with monotonous curvatures from the point of view of the applied differential geometry.

This article first discusses the generation technique of curves with monotonous curvatures as one of important requirements for designing aesthetic surfaces in CAD system. Next, this article discusses the main theorems of the Roulier's paper and views how we can apply their mathematical results to implementation of the curve generation function in our CAD system.

1. はじめに

本稿のテーマは、CAD (Computer Aided Design) システムにおける意匠面創成のための要素技術である。

意匠面 (aesthetic surface) とは、最終製品の表面形状を構成する曲面であり、デザイナーにより、意匠的な意図を持って形状設計された曲面を指す用語である。本稿では、意匠面の面品質について、特に要求水準の高い自動車製造業界を主たる念頭において説明したい。

自動車製造業において、意匠面は乗用車の外板形状を構成する曲面としてデザインされ、特に光線の映り込みの美しさが評価される。欧米自動車業界では意匠面のことを「クラス A サーフェス」とも呼んでいる。日経 CG¹⁾からの記事を参考として引用する。

クラス A サーフェスというのは、自動車業界で使われる言葉で、外から目に見える部分 (ボディやフェンダー、ドアなど) の最終的なサーフェス・データを指す。特に数学的な定義があるわけではないが、そのデータが最終的に製造に使われるため、きわめて精度の高いなめらかなサーフェスが要求される。これに対して、エンジンやサスペンションなどユーザの目から見えない部分のサーフェスをクラス B サーフェスと呼ぶ。【引用終わり】

意匠面形状の設計においては、「光線の映り込み」、「曲がり具合の味わい」など、

その意匠的な意図に曲面の曲率が深く関わる．伝統的な意匠面設計技法は，乗用車のクレイモデルを意匠意図が込められたヘラで削る作業（カースタイリング別冊^[2]参照）に代表されるように，境界線やヘラ形状曲線など何本かの形状を規定する曲線をもとに行われる．デザイナーの意匠意図のうち，あるものは，こうした形状規定曲線の曲率分布に反映される．

自動車製造業各社では，形状規定曲線に対する独自の曲率分布パターンを設計ノウハウとして決めているようであるが，代表的な曲率分布パターンは曲率単調性である．これは曲線の曲率値が，曲線に沿って単調に増加する/減少することを要請するものである．曲率単調曲線の生成技術は，意匠面創成のための重要な要素技術であるのみならず，数学の一分野である微分幾何学の応用という観点からも興味深い．

本稿では，曲率単調曲線を生成する技術の現状を解説し，実装に向けた課題と方策を明らかにしたい．

2. 曲線微分幾何からの準備

本稿のテーマである曲率単調曲線を論ずるためには，数学の一分野である微分幾何学の知識が必須である．この章では，本稿に必要な範囲で，曲線微分幾何の初歩を解説する．より詳しい内容は微分幾何の教科書^{[3][4]}を参照されたい．

2.1 曲線のパラメタ表示

本稿では，「ある区間で定義されたパラメタ $t \in [t_s, t_e]$ が動くにつれて，平面あるいは空間内の点 $C(t)$ が動く軌跡」として曲線を考える（曲線のパラメタ表示，図1参照）． $C(t)$ はパラメタ t を変数とするベクトル値関数であり， t に関する0階から r 階までの導関数

$$C(t), C'(t) = \frac{dC}{dt}, \dots, C^{(r)}(t) = \frac{d^r C}{dt^r} \quad (2.1)$$

がすべて連続であるとき， C^r 連続曲線であるという．

簡単のため本稿では基本的に， C^2 連続曲線を仮定する（一部では， C^3 以上の連続性が必要）．また，パラメタが動いても曲線上の点が停留するなど特異な状況はないと仮定する．

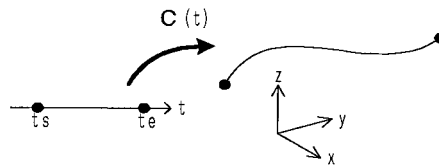


図 1 曲線のパラメタ表示

2.2 曲線の曲率と計算公式

曲線の曲率の定義を述べるため，はじめに，特別なパラメタとして曲線の弧長 s を考えよう．

$$s = \int_{t_s}^t \| \mathbf{C}'(t) \| dt \quad (\text{ここで, } \| \| \text{ はベクトルの長さを表す})(2.2)$$

弧長 s は, もとのパラメタ t の関数 $s = s(t)$ であるが, t と s の対応は 1 対 1 なので, 曲線のパラメタとして弧長 s を採用することもできる. これを弧長パラメタという(図 2 参照).

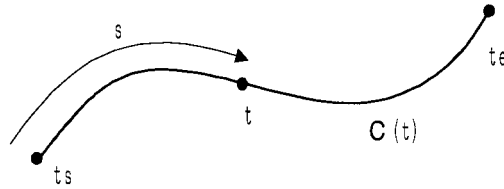


図 2 曲線の弧長パラメタ

微分幾何での数学理論的取り扱いには, 次に述べる便利な性質のため, 弧長パラメタが使われることが多い. 本稿でも, まず弧長パラメタ s で理論的な取り扱いを行い, 次いで弧長とは限らない一般のパラメタ t での議論を行う.

弧長パラメタでの特別な性質は, 曲線の 1 階導関数が単位ベクトル(長さ 1)になることである. すなわち,

$$\left\langle \frac{d\mathbf{C}}{ds}, \frac{d\mathbf{C}}{ds} \right\rangle = \left\| \frac{d\mathbf{C}}{ds} \right\|^2 = 1 \quad (\text{ここで, } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ はベクトルの内積を表す})(2.3)$$

が至るところで成り立つ. 曲線の 1 階導関数の方向は, 曲線の接線ベクトルを表すから,

$$\mathbf{e}_1(s) = \frac{d\mathbf{C}}{ds} \quad (2.4)$$

とにおいて, 曲線の単位接線ベクトル(unit tangent vector, 図 3 参照)とよぶ. 次に, 単位接線ベクトルの微分を計算する.(2.3)の両辺を s で微分すると,

$$\left\langle \mathbf{e}_1, \frac{d\mathbf{e}_1}{ds} \right\rangle = 0 \quad (2.5)$$

が得られる. これは, 単位接線ベクトルの変化が接線と直交する方向に発生することを意味しており, 曲線の曲がり具合を表現している. そこで,

$$\mathbf{e}_2(s) = \frac{\frac{d\mathbf{e}_1}{ds}}{\left\| \frac{d\mathbf{e}_1}{ds} \right\|}, \quad k(s) = \left\| \frac{d\mathbf{e}_1}{ds} \right\| \quad (2.6)$$

をそれぞれ単位主法線ベクトル(unit principal normal vector, 図 3 参照), 曲率(curvature)とよぶ. ここで,

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{ds} = \frac{d^2\mathbf{C}}{ds^2} \quad (2.7)$$

の関係に注意しておこう.

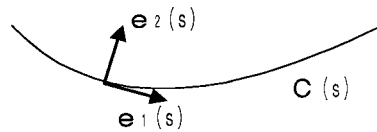


図 3 単位接線ベクトルと単位主法線ベクトル

$e_1(s)$, $e_2(s)$ は, 曲線に沿って動く局所座標軸ベクトルとなる. C^3 連続以上の滑らかさを持つ空間曲線では, さらに三つ目の局所座標軸ベクトルを考慮することができる. この場合, $\langle e_1(s), e_2(s) \rangle = 0$ および $\langle e_2(s), e_2(s) \rangle = 1$ の両辺を微分し,

$$\frac{de_2}{ds} = -k(s)e_1(s) + \tau(s)e_3(s) \quad (2.8)$$

のようにして $e_2(s)$ にも直交する単位法線ベクトル $e_3(s)$ と量 $\tau(s)$ を定めることができる. $e_3(s)$ を単位陪法線ベクトル (unit binormal vector), $\tau(s)$ を捩率 (torsion) とよぶ. 平面曲線では $\tau = 0$ であり, 陪法線ベクトルは考えなくてもよい.

CAD で使われる曲線のパラメタ表示は一般に弧長パラメタではないから, もとのパラメタ t について, 曲率までの式を書き直しておこう. まず, 単位接線ベクトルは

$$e_1(t) = \frac{C'(t)}{\|C'(t)\|} \quad (2.9)$$

と表現される. 次に, (2.7) に注目して曲線の 2 階導関数の関係を調べよう. まず, 1 階導関数を調べると

$$\frac{dC}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{dC}{ds} = \frac{ds}{dt} e_1(s) \quad (2.10)$$

ゆえ, (2.9) と比較して

$$\frac{ds}{dt} = \|C'(t)\| \quad (2.11)$$

を得る(この関係は, (2.2) からでも得られる). 次に, (2.10) を t で微分して, (2.6), (2.7) を使うと

$$\frac{d^2C}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2} \frac{dC}{ds} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{d^2C}{ds^2} = \frac{d^2s}{dt^2} \frac{dC}{ds} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 k(s) e_2(s) \quad (2.12)$$

となる. ここで, 右辺第 1 項は接線成分, 第 2 項は接線直交成分である. このことから, (2.11) に注意して

$$k(t) e_2(t) = \frac{C''(t) \text{ の接線直交成分}}{\|C'(t)\|^2} \quad (2.13)$$

という実用的な関係式が得られる. 左辺は曲率ベクトルとよばれる. 曲率は曲率ベクトルの長さであり, 曲率ベクトルの方向が単位主法線ベクトルである.

実例を紹介する. xy 座標平面上で原点中心, 半径 r の円を基準軸からの角度 (ラジアン) t をパラメタとして表現すると,

$$C(t) = [r \cos(t), r \sin(t)] \quad (2.14)$$

となる (図 4 参照). 簡単な計算により

$$\mathbf{e}_1(t) = [-\sin(t), \cos(t)], \tag{2.15}$$

$$\mathbf{e}_2(t) = [-\cos(t), -\sin(t)], \quad k(t) = \frac{1}{r} \tag{2.16}$$

がわかる．曲率と円の半径は逆数の関係にあることに注目しよう．

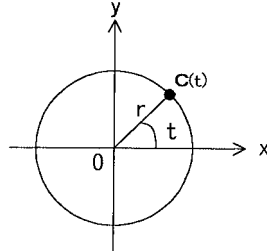


図 4 円のパラメタ表現

一般に，パラメタ t での曲率 $k(t)$ の逆数

$$r(t) = \frac{1}{k(t)} \tag{2.17}$$

は，線上点 $C(t)$ で曲線に 2 次的に接触する円（接触円 osculating circle）の半径を表しており，曲率半径（radius of curvature）とよばれる．また，接触円の中心を曲率中心（center of curvature）とよぶ（図 5 参照）．

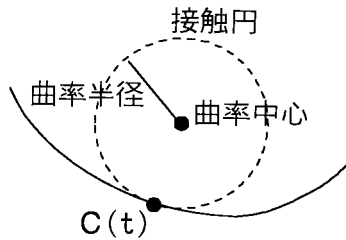


図 5 接触円，曲率半径，曲率中心

平面曲線の場合には，曲率について，さらに詳しい計算公式が得られる．平面曲線は適当な座標変換を行えば， xy 座標平面上にあるとして一般性を失わないので， $C(t) = [x(t), y(t)]$ と表示する．

平面曲線では，曲線の進行方向に対して左側，右側という概念が意味を持つ．そこで，単位主法線ベクトルが左右どちらに向くかで曲率に符号を付けることができる．これを平面曲線の符号付き曲率（signed curvature）とよぶ．本稿では，曲線の進行方向に対して左側に単位主法線ベクトルが向くときに正の曲率，右側に向くときに負の曲率という約束を採用しよう（図 6 参照）．

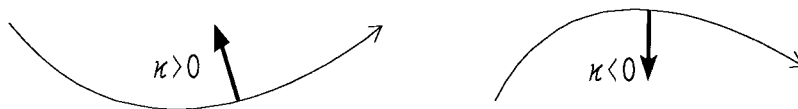


図 6 平面曲線の符号付き曲率

すなわち， $\mathbf{n}=[0, 0, 1]$ を平面の単位法線ベクトルとし，曲線 $C(t)$ の単位接線ベクトル $\mathbf{e}_1(t)$ に対して進行方向左側を向く単位法線ベクトル

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{n} \times \mathbf{e}_1(t) \quad (2.18)$$

を定める．こうして，符号付き曲率 $k(t)$ は，

$$\text{曲率ベクトル} = k(t)\mathbf{f}(t) \quad (2.19)$$

によって算出される．単位主法線ベクトル $\mathbf{e}_2(t)$ は，左側法線ベクトル $\mathbf{f}(t)$ に曲率の符号を掛けたものになる．

xy 平面上の平面曲線 $C(t)=[x(t), y(t)]$ に対して，式 (2.19) を計算すると

$$k(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\{(x'(t))^2 + (y'(t))^2\}^{3/2}} \quad (2.20)$$

という平面曲線の符号付き曲率計算公式が得られる．

3. 曲線の曲率制御の課題と困難点

第 1 章で述べたように，意匠面を扱う CAD システムにおいては，意匠面の形状を規定する曲線の曲率制御が重要な要件となっている．

しかし，曲線の曲率ベクトルは，(2.13) 式に見られるように，単純に曲線の 2 階導関数ではなく，これに非線形な加工を施さないと得られない．さらに，曲率ベクトルを決める本質的な部分は「曲線の 2 階導関数の接線直交成分」であり，「曲線の 2 階導関数の接線成分」は自由度としてシステムが何らかの方法で決める必要がある．これらのことが曲線の曲率制御を難しくする要因である．

この章以降，本稿では，

実際の意匠面モデリングでは，意匠面を平面で切断した断面線あるいは，意匠面をある平面に投影した輪郭線などの平面曲線が形状規定曲線として用いられることが多いこと

曲線の曲率制御技術の要点を述べるには平面曲線が典型的であることを考慮して，曲線は平面曲線であると仮定する．

3.1 曲率プロファイルと曲率単調性

横軸にパラメタ t ，縦軸に符号付き曲率値 $k(t)$ を目盛って得られる曲率関数 $k(t)$ のグラフを曲率プロファイル（あるいは曲率プロット）とよぶ．

図 7 の左図は円弧状の C^2 連続曲線である．グラフで * は，目盛り 1 刻みを表す．右図は，曲線の曲率プロファイルである．パラメタ $t=0.9$ 付近に曲率のピークがあることが読み取れる．曲率プロファイルからは曲線の目視確認だけではわからない微妙な情報が得られることに注目されたい．

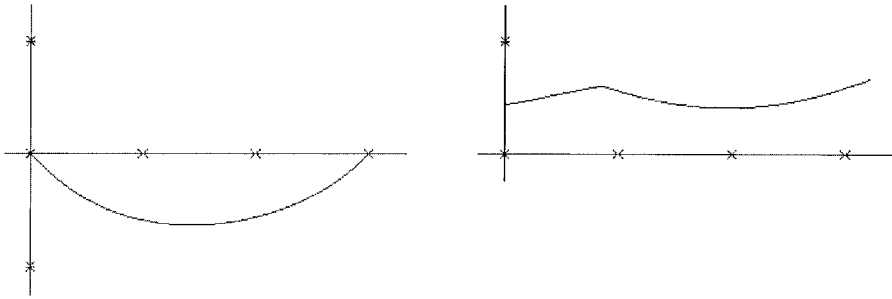


図 7 曲線とその曲率プロフィール

符号付き曲率の符号が曲率 0 を経て正負反転する箇所を変曲点 (point of inflection, 図 8 参照) という。変曲点では曲率ベクトルが 0 ベクトルとなり、単位主法線ベクトルは不定になるが、(2.19) 式のように考えれば不都合なく理解できる。通常の意匠的な曲線形状設計では、変曲点が存在しない曲線を使用することが多い。

図 8 左図の曲線は、 $y = x^3$ のグラフを $-1 \leq x \leq 1$ の範囲で考え、時計回りに 45 度回転させた曲線を $0 \leq t \leq 1$ の定義区間でパラメタ表示したものである。図で * は目盛り 1 刻みを表す。原点 $[0, 0]$ (パラメタ $t = 0.5$) が変曲点である。右図は、曲率プロフィールである。変曲点で符号付き曲率の値が符号変化していることがわかる。

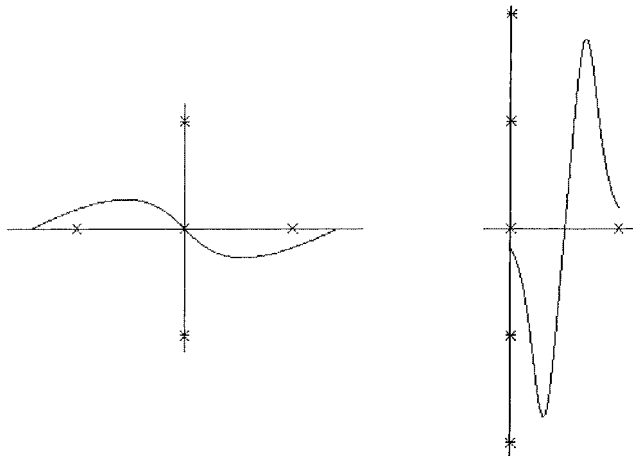


図 8 変曲点

- このことを考慮して、曲線の定義区間 $t \in [ts, te]$ で、曲率関数 $k(t)$ が
- 同符号性：つねに $k(t) \geq 0$, あるいは、つねに $k(t) \leq 0$ (変曲点なし)
- 単調性： $t_1 < t_2$ なら、つねに $k(t_1) < k(t_2)$ (単調増加), あるいは、
 $t_1 < t_2$ なら、つねに $k(t_1) > k(t_2)$ (単調減少)

を満たすとき、「曲率単調性 (monotone curvature) を持つ」といい、その曲線を曲率単調曲線とよぶ。

(注) 直線と円は曲率一定であり、上記定義を満たさないが、線分や円弧は曲率一定曲線として別扱いとし、曲率単調曲線としては扱わないことにする。

曲率単調曲線，曲率一定曲線を含む一般概念として凸曲線 (convex curve) という概念がある．第 4 章で登場するので簡単に触れておきたい．平面曲線 $C(t)$ の定義区間 $[t_s, t_e]$ 内の任意の 2 パラメタ $t_1 < t_2$ に対して，線上点 $C(t_1), C(t_2)$ を結ぶ線分が曲線をつねに同じ側にあるとき，その曲線を凸曲線とよぶ．曲率単調曲線，曲率一定曲線はともに凸曲線である．

3.2 曲率単調曲線の実例

曲率単調曲線の簡単な実例は，楕円弧と放物線弧である．

(1) 長軸端，短軸端を内部に含まない楕円弧

長半径を a ，短半径を b とし ($a > b$)，長軸を x 軸，短軸を y 軸方向に持つ原点中心の楕円の定義式は，よく知られているように

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3.4)$$

である．このうち，第 1 象限 ($x > 0, y > 0$) にある 1/4 楕円弧のパラメタ表示は，定義区間 $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ で

$$C(t) = [a \cos(t), b \sin(t)] \quad (3.5)$$

と表される．公式 (2.20) を用いて符号付き曲率 $k(t)$ を計算すると，

$$k(t) = \frac{ab}{\{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)\}^{3/2}} \quad (3.6)$$

が得られる．この関数は 1/4 楕円弧の定義区間でつねに正かつ単調減少である．

図 9 の左には， $a = 2, b = 1$ の 1/4 楕円弧が描かれている．図で * を付けたのは目盛り 1 を表す．右図は曲率プロファイルである． $t = 0$ で極大値 2， $t = \frac{\pi}{2}$ 1.570796 で極小値 $\frac{1}{4} = 0.25$ となり，定義区間で単調減少であることがわかる．

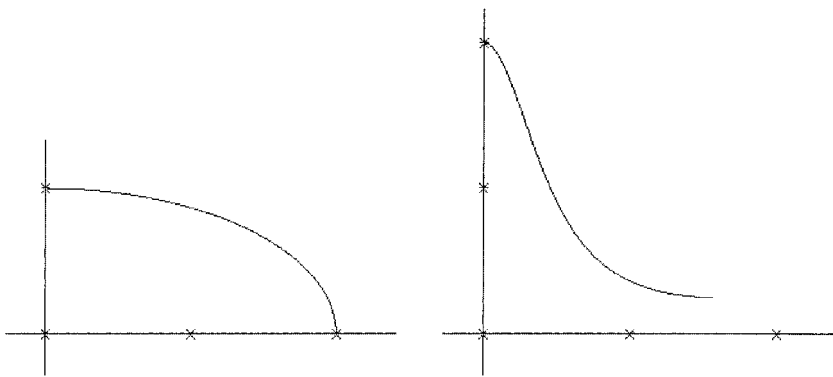


図 9 1/4 楕円弧と曲率プロファイル

(2) 頂点を内部に含まない放物線弧

頂点を原点とし，主軸を y 軸に持つ下に凸な放物線の定義式は， $a > 0$ として，

$$y = ax^2 \quad (3.7)$$

である．このうち，第 1 象限にある放物線弧は， $0 < t_s < t_e$ とし， $t \in [t_s, t_e]$ を定義区間にして

$$C(t) = [t, at^2] \quad (3.8)$$

で表される．公式 (2.20) を用いて符号付き曲率 $k(t)$ を計算すると，

$$k(t) = \frac{2a}{(1+4a^2t^2)^{3/2}} \quad (3.9)$$

が得られる．この関数はつねに正であり， $t=0$ では単調減少である．

図 10 の左には， $a=1$ の放物線弧が $0 \leq t \leq 1$ の範囲で描かれている．図で * を付けたのは目盛り 1 を表す．右図は曲率プロファイルである． $t=0$ で極大値 2 となり，単調減少しているのがわかる．

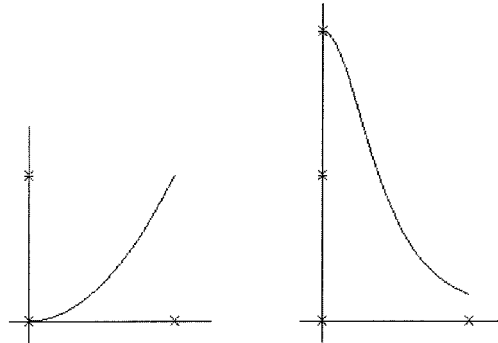


図 10 放物線弧と曲率プロファイル

3.3 プロトタイプ評価でわかった課題と困難点

筆者の開発チームでは，平成 11 年度前期に曲線の曲率制御技術を検証するためのプロトタイプ・コマンドを日本ユニシスの CAD/CAM/CAE 統合システムである CADCEUS 上に実装し評価を行った．概略仕様は，

平面上に n 個 ($n \geq 2$) の通過点と，各通過点での単位接線ベクトル，符号付き曲率を指定し，接線の方向と曲率値（および若干の形状調節自由度）をリアルタイムに動かしながら曲線形状と曲率プロファイルをモニタするというものである．

このプロトタイプ・コマンドを起動し，曲率単調曲線の生成を目標に，さまざまな通過点パターンと接線方向，曲率を指定しながら評価した．例えば，次の図 11 では，三つの通過点を指定したときの 1 ケースが描かれている．

図 11 で，* は目盛り 1 刻みを表している．上の図が曲線生成場面である．指定した通過点は * で示してある．座標は左から $Q_1 = [1, 4]$ ， $Q_2 = [2, 3]$ ， $Q_3 = [10, 4]$ である．通過点から出ている線分は単位接線ベクトルである．さらに，各点 Q_i での符号付き曲率 k_i として，

$$k_1 = 0.4866147$$

$$k_2 = 0.3908165$$

$$k_3 = 0.0211792$$

を指示する（放物線の曲線形状を期待）．形状調節自由度を対話的に調整し，曲率単調曲線を目指した結果の曲線形状が上図に描かれている．下図は，このときの曲率プ

ロファイルを示す．曲線の目視確認ではほぼ期待形状に近いが，曲率プロファイルは始点から少し進んだ位置で曲率が極大となっていることを示している．従って，曲率単調曲線になっていない．

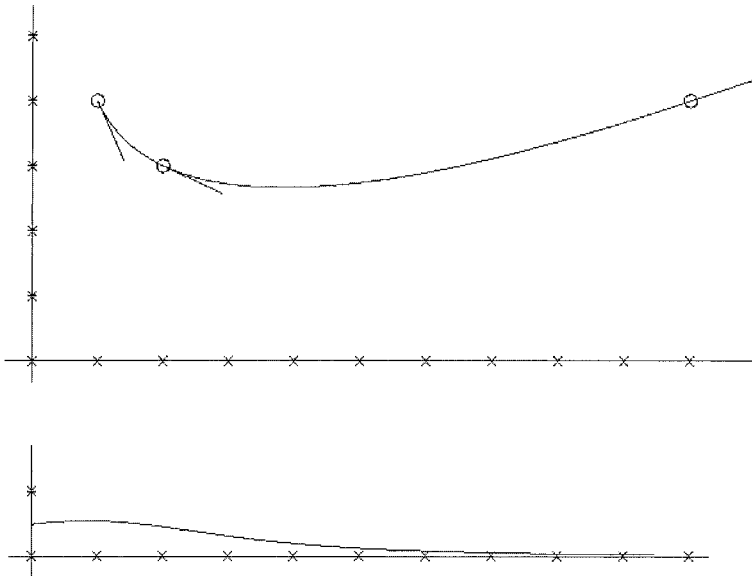


図 11 プロトタイプ・コマンド

こうした評価の結果，次のような三つの課題が判明した．

(1) 曲率単調曲線を手動操作で実現することは殆ど困難である

通過点での曲率が単調増加（減少）になるように指定しても，通過点間での曲率プロファイルが単調になるように（すなわち，曲率単調曲線になる）形状を制御することは非常に難しく，手動で行うことは殆ど困難であることがわかった．

(2) そもそも曲率単調曲線が存在し得るのか，もし，存在するなら，どのように形状調節の自由度を調整して曲率単調曲線に近づけばよいか

この課題は，上記(1)で述べたことをシステムが自動実行する際の実装技術的課題である．3個以上の通過点で接線方向と曲率が拘束される場合，3.2節で紹介したような単純な曲線を当てはめることはできない．このような場合，図形処理的には，それぞれの隣接2点間を多項式曲線（座標成分 $x(t)$, $y(t)$ がパラメタ t の多項式で表される曲線） $C(t)$ で補間する手法が使われる．接線方向は曲線の1階導関数に，曲率は曲線の2階導関数に含まれる情報であるから，拘束条件を満たすためには，

各通過点での0階から2階導関数までを指定した補間が必要である．こうした場面で使われる補間法は5次 Hermite 補間（Farin^[5] p.58 参照）とよばれる手法であり，各点間を5次多項式曲線で補間するものである．

さて，通過点以外の拘束条件は，通過点位置での接線方向と（符号付き）曲率であるが，本章の冒頭で触れたように，これらの情報は通過点位置での曲線の1階微分値，2階微分値そのものではなく，「1階微分値の大きさ」，「2階微分値の

接線成分」は自由度として残されている．これが上記プロトタイプ・コマンド仕様に述べた「若干の形状調節自由度」である．これらを調節すると，与えられた拘束条件を満たす範囲で曲線形状が変化する．その中に目標である曲率単調曲線があるのか否か，もしあるとして，形状調節自由度をどのように決めたら曲率単調曲線になるのかが問題である．

(3) G^2 連続曲線を C^2 連続曲線にする技術上の困難

さらに，この問題が解決されたとして，もう一つの技術上の壁を乗り越えなければならない．Hermite 補間は局所補間とよばれる手法のひとつであり，隣接 2 点間を多項式曲線で補間する．このような各点間を補間する曲線をセグメント (segment) とよぶ．CAD では，こうした多項式曲線セグメントの連なりとして曲線を表すことが多く，区分的多項式曲線 (piecewise polynomial curve) とよばれる．

隣接するセグメントは共有通過点で接線方向と曲率ベクトルが同一になっている．このような区分的多項式曲線を G^2 連続曲線という．各セグメントは独立した曲線であるため，共有通過点で隣接セグメント曲線の 1 階微分値，2 階微分値が等しいことは保証の限りでない．すなわち，

G^2 連続な区分的多項式曲線は，必ずしも C^2 連続曲線にならないのである．

ユーザが望む曲率プロファイルを持つ曲線が得られた後は，これらの曲線を形状規定曲線として意匠面の創成が控えていることを考えると，上記の曲線は少なくとも C^2 連続曲線でなければならない．曲面の補間では，拘束曲線の表現式どうしの足し算が行われるが， C^2 連続性が足し算で不変な性質であるのに対し， G^2 連続性は足し算で不変な性質でないために，曲面の補間が困難になる．

G^2 連続曲線の C^2 連続曲線化に関して，Herron^[6]は，「二つの曲線が共有点で G^2 連続になるよう接続しているとき，一方の曲線のパラメタを 2 次関数によりパラメタ変換すると 2 曲線を C^2 連続に接続できる」と主張している．

この主張は確かに共有点での局所的連続性の保証としては正しいが，大局的に適用する際には問題があることがわかった．

われわれの扱いたい状況では， n 本の 5 次多項式セグメントが各接続点で G^2 連続になるよう連なっている．これら全体の区分的多項式曲線を C^2 連続にするパラメタ変換関数を決定するのが課題である．Herron のアルゴリズムを全体に適用すると，区分的 2 次関数によるパラメタ変換関数が登場するはずである．

筆者は，実際にこのアルゴリズムを実装して評価したが，区分的 2 次関数を全体として決定することは困難 (殆どの場合に解なし) との結論に達した．

しかしながら， G^2 連続曲線の C^2 連続曲線化という問題に関して言及している論文は，筆者の知る限り，Herron^[6]以外に見当たらず，未解決問題として残されている．

4. 曲率単調性に関する既存技術の概観

この章では，第 3 章で指摘した課題のうち，課題 (2) に関して

隣接 2 点間で単位接線ベクトルと (符号付き) 曲率を指定したとき, 条件を満たす曲率単調曲線が存在するか, そして, 存在するならば, それは如何にして得られるか

という問題を考察しよう .

この問題に関して, 理論的に扱っている論文を調査した所, J.Roulier, T.Rando, B. Piper の共著論文^[7] (以下, Roulier 論文と略称) が最も目指す方向に近いことがわかった . 本章では, まず, この論文の内容の概略を紹介し, さらに, これ以外の関連研究にも触れて, 曲率単調性に関する既存技術を概観したい .

4.1 Roulier 論文の概略

Roulier 論文^[7]では, 平面上に与えられた 2 点を始終点とし, 端点での単位接線ベクトルと符号付き曲率値を指定したとき, 平面曲線が曲率単調になるための条件を提示している .

まず, 一般的な曲率単調曲線の条件を幾何的に記述した定理を紹介する .

定理 1 (Roulier 論文^[7]p.184 の Theorem 3, 図 12 参照)

P_1, P_2 を平面内の 2 点とし, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ を P_1, P_2 で与えられた平行でない単位接線ベクトルとする . 角度 (ラジアン) を反時計回りを正, 時計回りを負で測ることとし, 弦ベクトル P_1P_2 から \mathbf{u}_1 への角度を α_1 , P_1P_2 から \mathbf{u}_2 への角度を α_2 とする . $0 < |\alpha_1| < \frac{\pi}{2}$, $0 < |\alpha_2| < \frac{\pi}{2}$, $\alpha_1 < 0, \alpha_2 > 0$ を仮定する . また P_1, P_2 での曲率値 $0 < k_1 < k_2$ が指定されたとする . P_1 を通り \mathbf{u}_1 に直交する直線と, P_2 を通り \mathbf{u}_2 に直交する直線との交点を Q とする . C_1, C_2 をそれぞれ, P_1, P_2 での曲率中心とし, 各曲率半径を ρ_1, ρ_2 とする . このとき, P_1 から P_2 を結び, P_1, P_2 でそれぞれ単位接線ベクトル $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$, 曲率値 k_1, k_2 を持つような区間 $[0, 1]$ 上での C^3 連続な凸曲線 $C(t)$ で曲率単調なもの存在するための必要十分条件は, 次の 3 条件が満たされることである :

$$|C_1C_2| < \rho_1 - \rho_2, \quad (4.1)$$

$$\rho_1 - \rho_2 < |QC_1| + |QC_2|, \quad (4.2)$$

$$|\alpha_1| < |\alpha_2| \quad (4.3)$$

【定理 1 終わり】

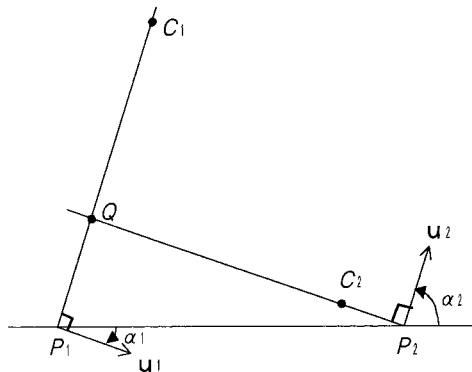


図 12 曲率単調曲線の存在条件 (Roulier 論文^[7]p.184 より図版引用)

この定理は、一般的な C³ 連続曲線での存在条件であり、3.3 節で述べたような 5 次多項式曲線の中に曲率単調曲線が存在するかは保証していない。

次に、xy 座標平面上的の平面曲線が C³ 連続曲線であると仮定し、曲率単調性の解析的な条件を調べるために、符号付き曲率 $k(t)$ の公式 (2.20) をさらに微分すると、

$$k'(t) = \frac{g(t)}{\{(x'(t))^2 + (y'(t))^2\}^{5/2}} \quad (4.4)$$

を得る。ここで、

$$c(t) = x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t), \quad (4.5)$$

$$g(t) = \{(x'(t))^2 + (y'(t))^2\}c'(t) - 3\{x'(t)x''(t) + y'(t)y''(t)\}c(t) \quad (4.6)$$

とおく。

C³ 連続曲線での曲率単調という条件は、曲率関数の 1 階導関数 $k'(t)$ が符号変化しないことだから、 $k'(t)$ が定義区間上でつねに 0 以上か、0 以下であればよい。(4.4) より、 $k'(t)$ の分母はつねに正であるから、分子である $g(t)$ が符号変化を起こさないという条件に帰着する。

具体的に「 $g(t)$ が符号変化を起こさないという条件」を調べるためには、扱う曲線の形式を決める必要がある。ここでは、(Roulier 論文^[7]と同じく) n 次 Bezier 曲線という多項式曲線の範囲で調べよう。

n 次 Bezier 曲線とは、区間 [0,1] で定義された n 次の多項式曲線であり、

$$C(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i P_i \quad (4.7)$$

で定義される。 $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ は 2 項係数とよばれる自然数で、 n 個の相異なるものから i 個を取り出す取り出し方の数に等しい。 P_0, P_1, \dots, P_n は制御点(control points)とよばれる $(n+1)$ 個の点列で、隣接制御点を結んだ折れ線は曲線の概形を表す。各制御点をブレンドしている

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \quad (4.8)$$

は n 次の Bernstein 多項式とよばれ、 n 次以下の多項式全体が構成する $(n+1)$ 次元線形空間の基底になっている。

xy 座標平面上にある n 次 Bezier 曲線を $C(t) = [x(t), y(t)]$ と表示すると、座標成分はそれぞれ n 次の多項式関数である。(4.7) の定義式を用いて、(4.6) の $g(t)$ を計算すると、 $(4n-7)$ 次以下の多項式になる。

(注) $x'(t)y'(t)$ は $(n-1)$ 次以下多項式、 $x''(t)$ 、 $y''(t)$ は $(n-2)$ 次以下多項式である。

$c(t)$ は形式的には $(2n-3)$ 次以下多項式であるが、定義 (4.5) より最高次係数が 0 になるので、 $(2n-4)$ 次以下多項式になる。上に出てきた $(4n-7)$ という次数は $4n-7 = (n-1) + (n-2) + (2n-4)$ として算出される。

そこで、 $(4n-7)$ 次以下多項式全体が構成する線形空間の基底として、 $(4n-7)$ 次 Bernstein 多項式を採用すれば、共通の定数 $n^4(n-1)$ を括り出した上で、

$$g(t) = n^4(n-1) \sum_{k=0}^{4n-7} H_k B_{k,4n-7}(t) \tag{4.9}$$

と表現できる (詳細は付録 1 参照). この表示式を用いて, 平面上の n 次 Bezier 曲線に対する曲率単調性の判定条件は次のように記述される. 以下のアルゴリズム 2 では, n 次 Bezier 曲線が, ある点で $g(t) > 0$ を満たしていると仮定する. このように仮定しても一般性を失わない. 実際, もし至るところで $g(t) = 0$ なら, 曲線の向き付けを反転すれば, $g(t) = 0$ にできる. また, もし恒等的に $g(t) = 0$ なら曲率一定であり, 円弧か線分になるが, Bezier 曲線では円弧を表現できないので線分しかあり得ない. この場合は別扱いすればよい.

アルゴリズム 2 (Roulier 論文⁷ p.189 の Algorithm 2, 図 13 参照)

- (a) 係数 $H_k (0 \leq k \leq 4n-7)$ がすべて非負なら, 曲率関数は単調増加である.
- (b) $H_0 < 0$ あるいは $H_{4n-7} < 0$ なら, n 次 Bezier 曲線は曲率単調になり得ない.
- (c) $H_0 = 0$ かつ $H_{4n-7} = 0$ かつ, ある $0 < k_0 < 4n-7$ に対して $H_{k_0} < 0$ であるなら, パラメタ $t = 1/2$ の場所で, de Casteljau アルゴリズム (Farin⁵ p.22 参照) により Bezier 曲線を 2 本の部分曲線に細分割 (subdivision) して, 各部分曲線に対して, (a), (b) の条件を検査する. それでもなお, 判定がつかなければ, 細分割を繰り返す.

【アルゴリズム 2 終わり】

アルゴリズム 2 の (a) の条件は次のように考えればよい. すなわち, 関数 $\frac{g(t)}{n^4(n-1)}$ のグラフを $x = t, y = \frac{g(t)}{n^4(n-1)}$ として xy 平面上に図示すると, Farin⁵ p.109 の結果を用いて,

$$\left[\frac{k}{4n-7}, H_k \right], 0 \leq k \leq 4n-7$$

を制御点とする $(4n-7)$ 次 Bezier 曲線になることがわかる. (a) の条件が満たされていると, この Bezier 曲線の制御点はすべて $y \geq 0$ の領域にあることになり, $g(t) \geq 0$ が結論される. $g(t)$ は $k'(t)$ の符号を決める分子であったから, $k'(t) \geq 0$ となり, ある一点で $g(t) > 0$ という仮定と合わせて, 曲率関数 $k(t)$ が単調増加になる.

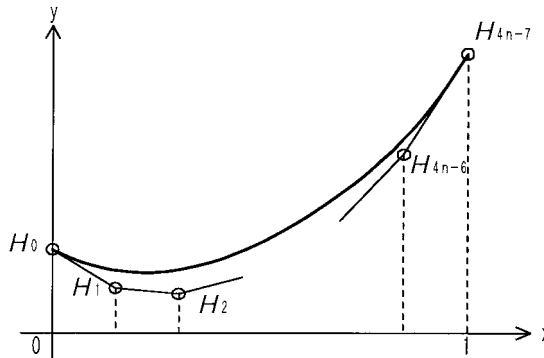


図 13 アルゴリズム 2 の条件 (a)

アルゴリズム 2 の判定条件は有限回の検査で判定できるから, 現実に実行可能な条

件である。

本節の最後に、曲率単調でない曲線から出発して曲率単調曲線へ近づくため、Roulier 論文⁷⁾で提案されている方法を紹介する。Roulier 論文⁷⁾では、曲線に対する評価値を定め、それを最小化することで、曲率の変動の少ない曲線(論文⁷⁾では“fair”な曲線と呼ばれる)を得ようとする方針が採用されている。ここで、採用される評価値は、

$$S_c = \int_0^L |k'(s)| ds \tag{4.10}$$

である。ここで、 s は弧長パラメタであり、 L は曲線の全弧長である。積分値 S_c は曲率関数 $k(t)$ の全変動 (total variation) とよばれる量である。この量を最小化することの数学的意義は、次の定理で保証される。

定理 3 (Roulier 論文⁷⁾ p.181 の Theorem 1)

平面曲線に対する拘束条件が、始終点および始終点での単位接線ベクトルと曲率値であり、拘束条件を満たす曲線族の中に少なくとも一つの曲率単調曲線が含まれるならば、評価値 S_c を最小化する曲線は、定義区間上で曲率単調曲線になる。

【定理 3 終わり】

以上の手法を、 xy 座標平面内の始終点 Q_1, Q_2 と、そこでの平行でない単位接線ベクトル、 u_1, u_2 および、符号付き曲率値 $0 < k_1 < k_2$ が拘束条件として指定された場合に、5 次 Bezier 曲線

$$C(t) = \sum_{i=0}^5 B_{i,5}(t) P_i \quad (\text{ここで, } 0 \leq t \leq 1) \tag{4.11}$$

の範囲で曲率単調曲線を探索する問題に適用しよう。次数が 5 であるのは、5 次 Hermite 補間を考慮した次数で、曲率を制御対象にする場合の最低次数である。

さて、6 個の制御点のうち、最初と最後の制御点は与えられた始終点である。

$$P_0 = Q_1, P_5 = Q_2 \tag{4.12}$$

次に、始終点での曲線 (4.11) の 1 階微分値を計算すると、

$$C'(0) = 5\Delta P_0, C'(1) = 5\Delta P_4 \tag{4.13}$$

となる。ここで、 $\Delta P_i = P_{i+1} - P_i$ は制御点列の前進差分を表す。差分ベクトル $\Delta P_0, \Delta P_4$ の長さをそれぞれ α_1, α_2 とすると、単位接線ベクトルの拘束条件から

$$\Delta P_0 = \alpha_1 u_1, \Delta P_4 = \alpha_2 u_2, \tag{4.14}$$

あるいは

$$P_1 = P_0 + \alpha_1 u_1, P_4 = P_5 - \alpha_2 u_2 \tag{4.15}$$

として、始終点に隣接する制御点 P_1, P_4 が記述される。

曲率との関係を調べるために、始終点での曲線(4.11)の 2 階微分値を計算すると、

$$C''(0) = 20\Delta^2 P_0, C''(1) = 20\Delta^2 P_3 \tag{4.16}$$

を得る。ここで、 $\Delta^2 P_i = \Delta P_{i+1} - \Delta P_i$ は制御点列の 2 階差分 (差分の差分) を表す。

始終点での進行左側の単位法線ベクトルを n_1, n_2 とし (符号付き曲率が正であるから、曲線は進行左側に曲がることに注意)、 P_1, P_4 に隣接する制御点 P_2, P_3 を

$$P_2 = P_1 + \beta_1 u_1 + d_1 n_1, P_3 = P_4 - \beta_2 u_2 + d_2 n_2 \tag{4.17}$$

と表す (Roulier 論文⁷⁾ p.183 参照)。これらを用いると、(2.13), (2.19) 式から、

$$k_1 \mathbf{n}_1 = \frac{C''(0) \text{ の } \mathbf{n}_1 \text{ 成分}}{\|C'(0)\|^2} = \frac{20d_1 \mathbf{n}_1}{(5\alpha_1)^2}, \quad k_2 \mathbf{n}_2 = \frac{C''(1) \text{ の } \mathbf{n}_2 \text{ 成分}}{\|C'(1)\|^2} = \frac{20d_2 \mathbf{n}_2}{(5\alpha_2)^2}$$

ゆえ，

$$d_1 = \frac{5}{4} (\alpha_1)^2 k_1, \quad d_2 = \frac{5}{4} (\alpha_2)^2 k_2 \quad (4.18)$$

を得る．すなわち， d_1 ， d_2 は自由に選択できる自由度ではなく，1階微分値の大きさと曲率により拘束される値であることがわかる．

以上から，拘束条件を満たす平面5次Bezier曲線の曲線族を記述する自由度（形状調節自由度）は， α_1 ， α_2 ， β_1 ， β_2 の四つであることが結論される．Roulier 論文^[7]では，評価値 S_c をこれらの形状調節自由度で記述し，初期値から出発して適当な非線形最適化法で最小化するアプローチが採用され，いくつかの拘束条件に関して，5次Bezier曲線が曲率単調曲線として紹介されている．最小化処理を行う前に，与えられた拘束条件の中に曲率単調解が存在するかの拘束条件検査に定理1が用いられる．そして，最小化の各段階で，曲率単調曲線が得られているかの判定条件にアルゴリズム2が用いられる．

次の図14に上記の手法で作成された曲率単調な5次Bezier曲線の例を掲げる（Roulier^[7]p.193のFigure 5cを描きなおしたもの）．左図はBezier曲線とその制御点，右図は曲率プロファイルを示している．図で*は目盛り1刻み，○は制御点，点線は制御点を結ぶ線分を表す．曲率プロファイルからは，確かに，この曲線が曲率単調曲線であることが読み取れる．

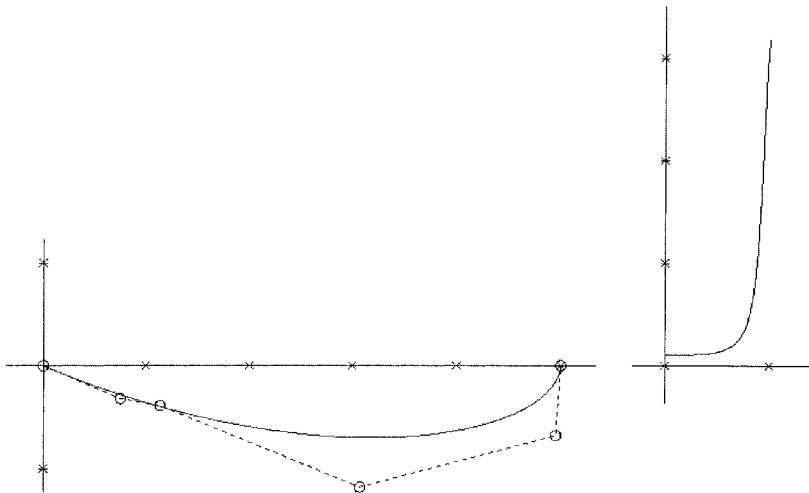


図 14 曲率単調な5次Bezier曲線の例

Roulier 論文^[7]は，非線形最適化法のロジックが用いられているので，収束計算部分を（効率にも注意して）慎重に実装する必要があるが，曲率単調性の問題に真正面から立ち向かった優れた論文であると考えられる．

4.2 その他の関連研究

曲率単調性の周辺で，Roulier 論文^[7]以外に見ておくべき研究として，本稿では，Bur-

chard らの研究^[8]と豊田工業大学の東研究室での研究^{[9]-[11]}に触れておきたい。これらの研究は、曲率単調曲線生成技術を改善したり、より発展させたりする際に多いに参考になると考える。

(1) Burchard らの研究

Burchard, Ayers, Frey, Sapidis による共著論文^[8] (以下, Burchard 論文と略称) で発表されている研究である。4名の著者のうち, 最初の2名の著者 (Burchard, Ayers) は, アメリカの自動車会社 GM 社の技術者で, 1960年代に意匠面設計システムを内製した経験に基づいて上記論文を著したとのことである。

Burchard 論文^[8]では, 曲率単調性より広い枠組みで, 「意匠的な曲線に課せられる要件は曲率関数が凸関数になること」として捉えている。特に, “対数的凸性” (logarithmic convexity) と著者らが名づけている

$$\frac{d^2 \log |k|}{ds^2} \geq 0 \quad (4.19)$$

という性質を経験に基づいて推奨している。また, Roulier 論文^[7]が非線形最適化法を採用したのに対して, 巧妙な離散的サンプリングに基づいた線形手法を提案している点も興味深い。

(2) 東研究室の縮閉線を用いた研究

豊田工業大学の東研究室では, 平面曲線の曲率中心の軌跡である縮閉線 (evolute, グレイ^[4]p.68 参照) を用いて意匠的な曲線の曲率制御を研究している。研究は長期に渡っており, すべての研究論文を網羅することはできないが, 精密工学会に発表された論文^{[9]-[11]}などがある。本稿のテーマに深く絡むが, 少し観点の異なる面からの貴重な労作である。さらに, 縮閉線に相当する曲面版である縮閉面という概念を提起して, 曲面の曲率を直接制御する研究も行われている。

本稿のテーマからさらに発展して, 意匠面のハイライト制御 (平行光源からの光線の映り込みの制御) の実装を検討する際には, 不可避の研究になると考えている。

5. 曲率単調曲線生成機能実装への展望

本章では, 第3章で述べた曲率単調曲線生成の技術的課題が, 第4章で述べた Roulier 論文^[7]を参考にどのように解決されるかの展望を述べる。

まず, 「 G^2 連続曲線の C^2 連続曲線化」技術が確立していない现阶段では, 隣接通過点間を多項式セグメントで局所補間して G^2 連続曲線を作ってから, 最後に C^2 連続化するアプローチ自体を考え直す必要がある。そのためには最初から C^2 連続以上の連続性を持つ区分的多項式曲線を処理対象にしなければならない。

Roulier 論文^[7]にある「曲率関数の全変動」 S_c を最適化の評価値にすることまで視野に入れると, C^3 連続以上の連続性が要求される。そして, 高次の Hermite 補間が奇数次数の多項式になることを考え合わせて, 7次の区分的多項式曲線が理論との接点を持つ最適次数であると思われる。各通過点では, 0階微分値 (通過点), 1階微分値の一部 (単位接線ベクトル), 2階微分値の一部 (曲率ベクトル) が拘束条件である。

このような枠組みを扱う最も自然な曲線表現は、

中間ノット多重度が3の7次Bスプライン曲線

である(Bスプライン曲線に関しては, Farin⁵ pp.107-123, Piegl Tiller¹² pp.82-100を参照). この曲線の連続性はC⁴連続になる. Roulier 論文⁷⁾で直接言及されているのは多項式曲線セグメントであるが, 「Bスプライン曲線に対しても同様の理論が成立する」と注意されており, 公式と定理を拡張すれば, 適用可能のはずである.

このためには, 拘束条件以外の形状調節自由度をきちんと定式化して, 評価値 S_c をこれらで近似表現するロジックを確立しておく必要がある.

本章の最後に, 本稿のテーマをさらに発展させる観点について述べたい.

曲線の曲率は, 曲線のパラメタの関数であるが, 「曲線の各点に付随する場」であると考えることもできる. 曲率単調性とは, 「曲線上の場に対して要請される条件」である. すると, 「望ましい曲率プロファイルを持つ曲線」の形状決定は, 「場を与えて曲線形状を決定する逆問題」と見ることができる.

東研究室の一連の研究⁹⁾⁻¹¹⁾は, このような「場の逆問題」に対する先進的な研究である.

「場の逆問題」は, 今後, 意匠面モデリングのみならず, CAE (Computer Aided Engineering) と連携した最適設計にも関わって, ますます重要になってくると考えている.

6. おわりに

本稿では, 意匠面創成の重要な要素技術である曲率単調曲線の生成技術について解説した.

まず, 筆者らが開発した曲線の曲率制御に関するプロトタイプ・コマンドで明らかになった課題を挙げて, 手動で曲率単調曲線を実現するのは困難であり, システムが自動サポートする必要性を指摘した. また, G²連続曲線をC²連続曲線化することが未解決であることを技術上の問題として指摘した.

次に平面上のn個の通過点と各点での単位接線ベクトル, そこでの(単調に与えられた)曲率値を拘束条件とし, 条件を満たす区分的多項式曲線を求めるための技術的基盤として, Roulier 論文⁷⁾を紹介した.

そして, われわれの課題を実現するためには, Roulier 論文⁷⁾の結果を7次C⁴連続なBスプライン曲線に対して拡張すればよいという展望を述べた.

[付録]

付録1 本文の式(4.9)の補足

本文の式(4.9)で, 共通の定数 $n^4(n-1)$ を括り出した上で,

$$g(t) = n^4(n-1) \sum_{k=0}^{4n-7} H_k B_{k,4n-7}(t) \quad (4.9)$$

と表現されると述べたが, 共通定数の出てくる仕組みを簡単に補足する.

関連する式を本文から引用すると,

$$c(t) = x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t), \quad (4.5)$$

$$g(t) = \{ (x'(t))^2 + (y'(t))^2 \} c'(t) - 3 \{ x'(t)x''(t) + y'(t)y''(t) \} c(t) \quad (4.6)$$

$$C(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i P_i \quad (4.7)$$

である．ここで，曲線 $C(t)$ の座標成分関数である $x(t)$ ， $y(t)$ は制御点 P_i の座標成分 x_i ， y_i を係数として n 次 Bernstein 多項式 $B_{i,n}(t)$ の 1 次結合で表されていることに注意しよう．

n 次 Bernstein 多項式の微分に関する基本性質を用いると，

$$x'(t) = n \sum_{k=0}^{n-1} B_{k,n-1}(t) \Delta x_k \quad (A.1.1)$$

$$y'(t) = n \sum_{k=0}^{n-1} B_{k,n-1}(t) \Delta y_k \quad (A.1.2)$$

$$x''(t) = n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} B_{k,n-2}(t) \Delta^2 x_k \quad (A.1.3)$$

$$y''(t) = n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} B_{k,n-2}(t) \Delta^2 y_k \quad (A.1.4)$$

が示される．ここで， Δ は前進差分を表す．

(A.1.1)~(A.1.4) を(4.5) に代入して整理すれば，

$$c(t) = n^2(n-1) \cdot \{(2n-3) \text{ 次以下の多項式} \}$$

となるが，最高次係数が 0 になるので，

$$c(t) = n^2(n-1) \cdot \{(2n-4) \text{ 次以下の多項式} \} \quad (A.1.5)$$

を得る．

さらに，(A.1.1)~(A.1.5) を(4.6) に代入すると，

$$\begin{aligned} g(t) &= n^2 \{(2n-2) \text{ 次以下の多項式} \} \cdot n^2(n-1) \{(2n-5) \text{ 次以下の多項式} \} \\ &\quad - 3n^2(n-1) \{(2n-3) \text{ 次以下の多項式} \} \cdot n^2(n-1) \{(2n-4) \text{ 次以下の多項式} \} \\ &= n^4(n-1) \{(4n-7) \text{ 次以下の多項式} \} \end{aligned} \quad (A.1.6)$$

となる．

最後に， $(4n-7)$ 次以下の多項式を $(4n-7)$ 次 Bernstein 多項式の 1 次結合として表せば，式(4.9) の形に整理できる．

-
- 参考文献**
- [1] 平田昌信, 「進化するサーフェスマデラー」, 日経 CG, 1999 年 1 月号, pp.58-75.
 - [2] 山田泰里, 「クレイモデリング——アイデアを立体化する技術」, カースタイリング別冊 93 1/2, 三栄書房, 1997 年(第 2 版) pp.25-60.
 - [3] 小林昭七, 『曲線と曲面の微分幾何』, 基礎数学選書 17, 裳華房, 1978 年(第 2 版) pp.1-29.
 - [4] A. グレイ著, 小島順監訳, 武沢護訳, 『Mathematica 曲線と曲面の微分幾何』, トッパン, 1996 年, pp.1-136.
 - [5] G.Farin 著, 木村文彦監修, 山口泰監訳, 『CAGD のための曲線・曲面理論』, 共立出版, 1991 年, pp.21-125.
 - [6] G.Herron, “Techniques for Visual Continuity”, in “Geometric Modeling: Algorithms and New Trends”, ed. by G. E. Farin, SIAM, 1987, pp.163-174.
 - [7] J. Roulrier, T. Rando, and B. Piper, “Fairness and Monotone Curvature”, in “Approximation Theory and Functional Analysis”, ed. by C. K. Chui, Academic Press, 1991, pp.177-199.
 - [8] H. G. Burchard, J. A. Ayers, W. H. Frey, and N. S. Sapidis, “Approximation with Aesthetic Constraints”, in “Designing Fair Curves and Surfaces”, ed. by N. S. Sapidis, SIAM, 1994, pp.3-28.

- [9] 東正毅, 毛利仁, 斎藤剛, “ 縮閉線に基づく曲率変化の滑らかな曲線, 曲面の生成 (第 1 報) —— 縮閉線の決定と有理 Bezier 曲線による表現 —— ”, 精密工学会誌, Vol.59, No.11, 1993, pp.141 146.
- [10] 東正毅, 川畑弘幸, 毛利仁, “ 縮閉線に基づく曲率変化の滑らかな曲線, 曲面の生成 (第 2 報) —— 曲線形状の制御と空間曲線の生成 —— ”, 精密工学会誌, Vol.60, No.4, 1994, pp.519 523.
- [11] 東正毅, 山根道敏, “ 縮閉線に基づく曲率変化の滑らかな曲線, 曲面の生成 (第 8 報) —— 複数セグメントに対する表現式と曲面形状の制御 —— ”, 1996 年度精密工学会秋季大会学術講演会講演論文集, 1996, pp.599 600.
- [12] L. Piegl and W. Tiller, “ The NURBS Book ”, Springer Verlag, 1995, pp.1 116.

執筆者紹介 清水保弘 (Yasuhiro Shimizu)

1954 年生 . 1978 年東京大学理学部数学科卒業 . 1984 年
東京都立大学大学院理学研究科博士課程満期退学 . 1985
年日本ユニシス(株)入社 . CAD/CAM システムの開発に
従事 . 現在 , 日本ユニシス・ソフトウェア(株)に出向中 .
日本数学会会員 . 情報処理学会会員 . 1999 年度から 2001
年度まで東京大学大学院数理科学研究科連携併任講座客員
教授 .